

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Partielle Differentialgleichungen

Thomas Schmidt
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Vorlesung an der Technischen Universität Hamburg
Sommersemester 2024

- 1 Kapitel 1: Grundlagen, Terminologie, Beispiele
 - 1.1 Terminologie bei PDG
 - 1.2 Vermischte Beispiele für PDG
- 2 Kapitel 2: PDG erster Ordnung
 - 2.1 Die Kontinuitätsgleichung (und ihr Hintergrund)
 - 2.2 Die Methode der Charakteristiken
 - 2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen
- 3 Kapitel 3: PDG zweiter Ordnung
 - 3.1 Die Laplace- und Poisson-Gleichung
 - 3.2 Die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung
 - 3.3 Die Wellengleichung

Literatur/Quellen

Kapitel 1: Grundlagen, Terminologie, Beispiele

Das Studium partieller Differentialgleichungen führt mathematisch sehr weit und umfasst etliche gänzlich verschiedene Theorien und Aspekte.

Diese Vorlesung kann daher nur eine sehr grundlegende Einführung in die generelle Thematik geben und zielt schwerpunktmäßig auf die Behandlung einiger spezieller Gleichungen mit Modellcharakter ab.

1.1 Terminologie bei PDG

Terminologie (für partielle Ableitungen)

Für Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ von n Variablen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit beliebigen $n, q \in \mathbb{N}$ vereinbare Notation für

- *alle ersten partiellen Ableitungen* (Jacobi-Matrix; Gradient, falls $q = 1$):

$$Du := Ju := \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{i=1,2,\dots,n} = (\partial_i u)_{i=1,2,\dots,n},$$

- *alle zweiten partiellen Ableitungen* (Hesse-Matrix, falls $q = 1$):

$$D^2u := \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n} = (\partial_i \partial_j u)_{i,j=1,\dots,n},$$

- *alle k -ten partiellen Ableitungen mit beliebigem $k \in \mathbb{N}$:*

$$D^k u := \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} \right)_{i_1, \dots, i_k=1, \dots, n} = (\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} u)_{i_1, \dots, i_k=1, \dots, n}.$$

Allgemeine Form partieller Differentialgleichungen

Definition (partielle Differentialgleichung)

Eine *partielle Differentialgleichung* (kurz PDG oder partielle DGL) ist eine Gleichung mit partiellen Ableitungen bis Ordnung $m \geq 1$ der Form

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x), \dots, D^m u(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

oder in funktionaler Kurznotation

$$F(\cdot, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) \equiv 0 \quad \text{auf } \Omega$$

für eine *gesuchte Funktion* $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Erfüllt u die Gleichung, so heißt u eine *Lösung* der PDG auf Ω .

Der *entscheidende Unterschied* zu GDG ist, dass $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nicht nur eine, sondern *mehrere* (nämlich $n \geq 2$) *Variablen* enthält.

Bezeichnungen bei partiellen Differentialgleichungen

Bezeichnungen bei PDG $F(\cdot, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) \equiv 0$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

m : **Ordnung** der PDG (wenn $D^m u$ wirklich vorkommt),

n : **Anzahl Variablen** (wie gesagt $n \geq 2$),

q : **Anzahl** (Komponenten-) **Funktionen** (von $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$),

N : **Anzahl** (Komponenten-) **Gleichungen** (von PDG mit „ \equiv “ in \mathbb{R}^N),

F : gegebene **Strukturfunktion** der PDG
(von geeignetem Definitionsbereich nach \mathbb{R}^N).

Tatsächlich geht es **in dieser Vorlesung** vor allem um $N = q = 1$ (**skalare PDG für eine Funktion**) mit **Ordnung** $m \in \{1, 2\}$. Auch $N = q \geq 2$ (PDG-System für mehrere Funktionen) ist sinnvoll, führt aber eher zu weit.

Randbedingungen

I.A. sind nur **Randwertprobleme (RWPe)** aus PDG und **zusätzlichen Randbedingungen (RBen)** auf $\partial\Omega$ eindeutig lösbar. Als grobe Faustregel erfordert ein PDG-System der Ordnung m für $N = q$ Funktionen $\frac{mq}{2}$ RBen (wobei „halbe RBen“ nur einen Randteil betreffen, oft ähnlich zu ABen bei GDG).

Verbreitet sind (Varianten von) **Dirichlet-RBen**

$$u(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

mit gegebener Funktion $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ und **Neumann-RBen**

$$\partial_\nu u(x) = \psi(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega$$

mit äußeren Einheitsnormalenvektorfeld $\nu: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ an $\partial\Omega$, Normalenableitung $\partial_\nu u(x) := \mathbf{J}u(x)\nu(x)$ und gegebener Funktion $\psi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ sowie **Anfangsbedingungen (ABen)/Cauchy-Bedingungen** (dazu später).

Klassifikation von PDG

Wie GDG klassifiziert man auch PDG der Ordnung m wie folgt:

- **Autonome PDG** haben die Form $F_0(u, Du, D^2u, \dots, D^m u) \equiv 0$.
- **Lineare PDG** hängen affin (linear) von $u, Du, D^2u, \dots, D^m u$ ab. Die i.A. x -abhängigen Vorfaktoren vor u und seinen Ableitungen nennt man dann **Koeffizienten**, von u und seinen Ableitungen unabhängige Terme werden oft auf die rechte Seite gebracht und heißen **Inhomogenität**.

Bei nichtlinearen PDG unterscheidet man weiterhin:

- **Semilineare PDG** hängen affin (linear) von $D^m u$ ab und weisen nur von x abhängige Koeffizienten vor den m -ten Ableitungen auf.
- **Quasilineare PDG** hängen affin (linear) von $D^m u$ ab (allgemein mit $(\cdot, u, Du, \dots, D^{m-1}u)$ -abhängigen Koeffizienten vor den m -ten Ableitungen).
- **Voll nichtlineare PDG** sind nicht quasilinear.

Grundlegende Typen von PDG

Für diese Vorlesung **grundlegende Typen skalarer PDG** (für $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$):

- **Lineare PDG erster Ordnung** (mit Koeffizienten $a_i, b: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + b(x)u(x) = f(x).$$

- **Lineare PDG zweiter Ordnung** (mit Koeffizienten $a_{i,j}, b_i, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x).$$

- **Semilineare PDG erster Ordnung** (mit $a_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $b: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u(x)).$$

- **Quasilineare PDG erster Ordnung** (mit $a_i, b: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = b(x, u(x)).$$

1.2 Vermischte Beispiele für PDG

Im Folgenden werden eine Reihe **Beispiele aus dem „Zoo“ grundlegender PDG** angegeben sowie passende RBen und Interpretationen kurz diskutiert. Die gänzlich verschiedenen Interpretationen und Anwendungskontexte **unterstreichen** dabei die **weite Bedeutung von PDG**.

Wird nichts anderes gesagt, handelt es sich bei den Beispielen jeweils um eine skalare Gleichung für eine einzelne Funktion.

Transportgleichung

Lineare Transportgleichung für $u: [0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + a(t, x) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem $T > 0$ und $a: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ („ \cdot “ ist Skalarprodukt).

Typisches Feature: Auftreten von **Zeitvariable** $t \in [0, T)$ und **Raumvariablen** $x \in \mathbb{R}^n$. Oft wird dann nur ∇u notiert, behält aber die Bedeutung $\nabla_x u$.

Klassifikation: Ordnung 1, linear, homogen.

Sinnvoll mit **Anfangsbedingung** („halbe RB“; $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben):

$$u(0, x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Interpretation: Lösungen u modellieren die Dichte von Masse oder Ladung, die entlang des Felds a transportiert wird. Speziell entspricht konstantes a einer gleichmäßigen Drift $u(t, x) = u_0(x - ta)$ mit Geschwindigkeit $a \in \mathbb{R}^n$.

Cauchy-Riemann-Gleichungen

Cauchy-Riemann-Gleichungen für $f, g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ in Variablen (x, y) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &\equiv 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Klassifikation: System von 2 Gleichungen, Ordnung 1, linear, homogen.

Bedeutung: Charakterisiert bei Identifikation $\mathbb{C} \ni x + iy \hat{=} (x, y) \in \mathbb{R}^2$ die holomorphen (d.h. komplex differenzierbaren) Funktionen $f + ig: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mehr in Vorlesung „Komplexe Funktionen“!

Sinnvoll mit **Dirichlet-RB** für entweder f oder g auf $\partial\Omega$
(dann allerdings noch additive Konstante bei anderer Funktion frei).

Laplace-Gleichung und Poisson-Gleichung

Laplace-Gleichung bzw. Poisson- oder Potentialgleichung für $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und mit dem wichtigen Laplace-Operator

$$\Delta u(x) := \operatorname{div}(\nabla u)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \operatorname{Spur}(D^2 u(x)).$$

Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man auch harmonische Funktionen.

Klassifikation: Ordnung 2, linear, homogen bzw. inhomogen.

Sinnvoll mit entweder Dirichlet-RB oder Neumann-RB für u auf $\partial\Omega$.

Bedeutung/Interpretation: Charakterisiert Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen. Lösungen modellieren das elektrische Potential bei Ladungsdichte f/ε_0 (mit physikalischer Konstante $\varepsilon_0 > 0$).

Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung

Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung für $u: [0, T) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta_x u(t, x) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in \Omega_T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

wieder mit Zeit- und Raum-Variablen und mit Abkürzung $S_T := (0, T) \times S$.

Klassifikation: Ordnung 2, linear, homogen (aber inhomogen auch relevant).

Sinnvoll z.B. mit **AB und Dirichlet-RB** (\rightsquigarrow 1 RB auf „parabolischem Rand“)

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ für } x \in \Omega, \quad u(t, x) = g(t, x) \text{ für } (t, x) \in (\partial\Omega)_T$$

für gegebene $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: (\partial\Omega)_T \rightarrow \mathbb{R}$.

Interpretation: Lösungen u modellieren die Massendichte/Konzentration bei Diffusionsprozessen oder die Temperatur bei der Wärmeausbreitung.

Im **stationären Fall** $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ erhalte Laplace-Gleichung zurück.

Navier-Stokes-Gleichungen

Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen für $(\vec{v}, p): [0, T) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mu \Delta_x \vec{v} + \rho \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} &= -\nabla_x p, \\ \operatorname{div}_x \vec{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Omega_T \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

mit Konstanten $\rho, \mu > 0$.

Klassifikation: System von $n+1$ Gleichungen, Ordnung 2, semilinear.

Sinnvolle RB wie bei Diffusionsgleichung (auch No-Slip-RBen genannt).

Interpretation: Lösungen (\vec{v}, p) modellieren Geschwindigkeit und Druck bei Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ und konstanter Viskosität μ . **Absolut grundlegend in Fluidmechanik!**

Speziell für $\mu = 0$ erhalte die **Euler-Gleichungen** der Fluidmechanik und im Fall $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \equiv 0$ die **stationären Navier-Stokes- bzw. Euler-Gleichungen**.

Wellengleichung

Wellengleichung für $u: \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta_x u(t, x) = 0 \quad \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Klassifikation: Ordnung 2, linear, homogen (aber inhomogen auch relevant).

Sinnvoll z.B. mit **2 ABen und Dirichlet-RB** (dennoch eher 1 RB insgesamt)

$$u(0, x) = u_0(x) \text{ für } x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x) \text{ für } x \in \Omega,$$

$$u(t, x) = g(t, x) \text{ für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \partial\Omega$$

für gegebene $u_0, v_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Interpretation: Lösungen u modellieren Auslenkungen bei der Ausbreitung von Wellen und/oder bei Schwingungen.

Im **stationären Fall** $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ erhalte wieder Laplace-Gleichung zurück.

Schrödinger-Gleichung

Schrödinger-Gleichung für $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x \psi - V\psi \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten $\hbar, m > 0$.

Klassifikation: Skalar über \mathbb{C} /System über \mathbb{R} , Ordnung 2, linear, homogen.

Sinnvoll mit **AB** ($\psi_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben):

$$\psi(0, \cdot) = \psi_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.$$

Interpretation: Lösungen ψ sind Wellenfunktionen (quantenmechanische Zustände) eines punktförmigen Teilchens der Masse m im Potential V (mit reduzierter Planck-Konstante \hbar). **Grundlegend für die Quantenmechanik!**

Produkt-Exponentialansatz führt u.U. auf Eigenwertproblem für Δ_x .

Maxwell-Gleichungen

Maxwell-Gleichungen im Vakuum für $(\vec{E}, \vec{B}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \operatorname{div}_x \vec{E}(t, x) &= \rho(t, x), \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t, x) + \operatorname{rot}_x \vec{E}(t, x) &= 0, \\ \operatorname{div}_x \vec{B}(t, x) &= 0, \\ \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(t, x) - \operatorname{rot}_x \vec{B}(t, x) &= -\mu_0 \vec{j}(t, x) \end{aligned} \right\} \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

mit gegebenen $(\rho, \vec{j}): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und Konstanten $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$.

Klassifikation: 8 Komponenten-Gleichungen für 6 Komponenten-Funktionen (okay, weil rot stark entartet; $\operatorname{rot} \circ \nabla \equiv 0$, $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} \equiv 0$), linear, i.A. inhomogen.

Sinnvoll mit **ABen** $\vec{E}(0, x) = \vec{E}_0(x)$ und $\vec{B}(0, x) = \vec{B}_0(x)$ für gegebene $(\vec{E}_0, \vec{B}_0): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit $\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_0 = \rho(0, \cdot)$ und $\operatorname{div} \vec{B}_0 \equiv 0$ auf \mathbb{R}^3 .

Interpretation: Diese vier **Grundgleichungen der Elektrodynamik** bestimmen die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Flussdichte \vec{B} bei vorgegebener elektrischer Ladungsdichte ρ und elektrischer Stromdichte \vec{j} .

Minimalflächengleichung

Minimalflächengleichung für $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^n .$$

Klassifikation: Ordnung 2, quasilinear.

Sinnvoll mit **Dirichlet-RB** für u auf $\partial\Omega$ oder gewissen **freien RBen**.

Interpretation: Graphen von Lösungen u sind sogenannte **Minimalflächen**, die in jedem ihrer Punkte mittlere Krümmung Null haben und in geometrischer Analysis und Differentialgeometrie von Interesse sind.

Monge-Ampère-Gleichung

Monge-Ampère-Gleichung für $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\det(D^2u(x)) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

mit gegebenem (oftmals überall positivem) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Klassifikation: Ordnung 2, voll nichtlinear.

Sinnvoll mit **Dirichlet-RB** oder **Neumann-RB** oder gewisser **natürlicher RB**.

Anwendungen: Lösungen u hängen mit dem **Optimaltransport** von Masseverteilungen und mit **Flächen vorgeschriebener Gauß-Krümmung** zusammen.

Schwerpunkte der Vorlesung

Schwerpunktmäßig werden als Modellfälle mit besonders exemplarischen Charakter nun

- allgemeine PDG erster Ordnung inklusive der **Transportgleichung**,
- die **Laplace- und Poisson-Gleichung** (inklusive Eigenwertprobleme),
- die **Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung**
- und die **Wellengleichung**

genauer behandelt.

Kapitel 2: PDG erster Ordnung

PDG erster Ordnung treten in verschiedenen Anwendungskontexten auf, beschreiben aber meist eine zeitliche Entwicklung ausgehend von einer AB. Im Allgemeinen können PDG erster Ordnung eher noch explizit gelöst oder analysiert werden als PDG zweiter und höherer Ordnung.

In diesem Kapitel werden nun zunächst Facetten eines zentralen Anwendungskontexts diskutiert, bevor dann eine recht allgemeine Lösungstheorie und verschiedene Spezialfälle angegangen werden.

2.1 Die Kontinuitätsgleichung (und ihr Hintergrund)

Nutze hier stets Zeit-/Raumvariablen (t, x) sowie Kurznotationen $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$ und $\operatorname{div}(\dots) := \operatorname{div}_x(\dots)$. Die **Kontinuitätsgleichung** ist die lineare PDG

$$\boxed{u_t + \operatorname{div}(u\vec{v}) \equiv 0} \quad \text{auf offenem } U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

für eine gesuchte Funktion $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ und ein gegebenes oder von u abhängiges Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (beide in Variablen $(t, x) \in U$).

Interpretation: Ist u Dichte einer gemäß \vec{v} bewegten Größe (oft der Masse), so ist zur Zeit t und im Punkt x die zeitliche Änderungsrate $u_t(t, x)$ gleich der räumlichen Zu- bzw. Abstromdichte $-\operatorname{div}(u\vec{v})(t, x)$ ($\operatorname{div}(u\vec{v}) > 0 \rightsquigarrow$ Quellen-/Abstromdichte; $\operatorname{div}(u\vec{v}) < 0 \rightsquigarrow$ Senken-/Zustromdichte).

Im 1d-Fall $n = 1$, der auch schon von Interesse ist, erhalte einfach

$$u_t + (uv)_x \equiv 0 \quad \text{auf } U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung

Zur **Unterfütterung der Interpretation** sei $t \mapsto \Phi(t, x)$ die Trajektorie eines Teilchens, das zur Zeit $t = 0$ in $x \in U_0$ startet. (Mathematisch betrachte $\Phi \in C^2(I \times U_0, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(0, x) = x$ für $x \in U_0$, mit offenen $0 \in I \subset \mathbb{R}$, $U_0 \subset \mathbb{R}^n$.) Erhalte das mitbewegte Gebiet $U := \{(t, \Phi(t, x)) : t \in I, x \in U_0\}$ und das zu Φ gehörige Geschwindigkeitsfeld \vec{v} auf U mit

$$\vec{v}(t, \Phi(t, x)) = \partial_t \Phi(t, x) \quad \text{für } (t, x) \in I \times U_0.$$

Satz (Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung)

Ist alles wie oben und $x \mapsto \Phi(t, x)$ für jedes $t \in I$ ein Diffeomorphismus, so sind für $u \in C^1(U)$ **äquivalent**:

- (1) u löst die **Kontinuitätsgleichung** $u_t + \operatorname{div}(u\vec{v}) \equiv 0$ auf U .
- (2) **Massenerhaltung** in mitbewegten Gebieten: Es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi(t, A_0)} u(t, x) \, dx = 0$$

für jede kompakte und messbare Teilmenge $A_0 \subset U_0$ und jedes $t \in I$.

Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung (Fortsetzung)

Ergänzende Anmerkungen:

- Im Satz und im Folgenden sind kompakte Mengen abgeschlossen und beschränkt sowie messbare Mengen (Jordan-)messbar im Sinn der Analysis III.
- Die Voraussetzungen des Satzes sind für Trajektorien eines GDG-Systems in vielen (guten) Fällen erfüllt. Ihr Nachweis braucht aber mehr GDG-Theorie.

Beweis des Satzes zu Kontinuitätsgleichung und Massenerhaltung:

Der Reynoldssche Transportsatz für das Ableiten auf dem bewegten Gebiet (siehe nächste Folie) gibt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi(t, A_0)} u(t, x) \, dx = \int_{\Phi(t, A_0)} [u_t(t, x) + \operatorname{div}(u\vec{v})(t, x)] \, dx$$

für A_0 wie in (2) und $t \in I$. Deshalb ist (1) \implies (2) direkt klar. Gelte nun (2). Weil jede kompakte und messbare Teilmenge $B_t \subset \Phi(t, U_0)$ die Form $B_t = \Phi(t, A_0)$ hat, folgt $\int_{B_t} [\dots] \, dx = 0$ für jedes solche B_t . Man schließt auf $[\dots] = 0$ für alle $x \in \Phi(t, U_0)$ und insgesamt für alle $(t, x) \in U$. \square

Der Reynoldssche Transportsatz

Satz (Reynoldsscher Transportsatz)

Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Phi(t, A_0)} u(t, x) \, dx = \int_{\Phi(t, A_0)} [u_t(t, x) + \operatorname{div}(u\vec{v})(t, x)] \, dx$$

für jede kompakte und messbare Teilmenge $A_0 \subset U_0$ und jedes $t \in I$.

Beweis: Die Transformationsformel der Analysis III besagt ($D\Phi := D_x\Phi$)

$$\int_{\Phi(t, A_0)} u(t, x) \, dx = \int_{A_0} u(t, \Phi(t, x)) |\det(D\Phi(t, x))| \, dx.$$

Ableiten nach dem Auftreten von t rechts — nach dem dritten mit dem nächsten Lemma — ergibt dann (mit Kurznotation und $\partial_t\Phi = \vec{v}(\cdot, \Phi)$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Phi(t, A_0)} u \, dx &= \int_{A_0} [u_t + \nabla u \cdot \vec{v} + (u \operatorname{div} \vec{v})](\cdot, \Phi) |\det(D\Phi)| \, dx \\ &= \int_{A_0} [u_t + \operatorname{div}(u\vec{v})](\cdot, \Phi) |\det(D\Phi)| \, dx \\ &= \int_{\Phi(t, A_0)} [u_t + \operatorname{div}(u\vec{v})] \, dx. \end{aligned}$$

□

Lemma für den Beweis des Reynoldsschen Transportsatzes

Lemma (Euler-Identität der Fluidmechanik/Ableitung der Jacobischen)

Mit Voraussetzungen und Notation der vorigen Sätze gilt

$$\partial_t |\det(D\Phi)| = (\operatorname{div} \vec{v})(\cdot, \Phi) |\det(D\Phi)| \quad \text{auf } I \times U_0.$$

Beweis: Durch Fallunterscheidung nach Vorzeichen von $\det(D\Phi)$ reduziere auf Nachweis der Behauptung ohne Beträge. Aus Laplace-Entwicklung

$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} (\operatorname{adj} A)_{ki}$ für $A = (a_{ij})$ bekomme $\frac{\partial(\det A)}{\partial a_{ij}} = (\operatorname{adj} A)_{ji}$.

Damit berechne erst

$$\partial_t(\det(D\Phi)) = \sum_{i,j=1}^n (\operatorname{adj}(D\Phi))_{ji} \partial_t(D\Phi)_{ij} = \operatorname{Spur}(\operatorname{adj}(D\Phi) D \partial_t \Phi)$$

und weiter mit $\operatorname{adj} A = A^{-1} \det A$ und $\partial_t \Phi = \vec{v}(\cdot, \Phi)$ dann

$$\begin{aligned} \dots &= \operatorname{Spur}[(D\Phi)^{-1} D(\vec{v}(\cdot, \Phi))] \det(D\Phi) \\ &= \operatorname{Spur}[(D\Phi)^{-1} D\vec{v}(\cdot, \Phi) D\Phi] \det(D\Phi) \\ &= \operatorname{Spur}[D\vec{v}(\cdot, \Phi)] \det(D\Phi) = (\operatorname{div} \vec{v})(\cdot, \Phi) \det(D\Phi). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Lemmas (und der vorigen Sätze) komplett. \square

Zu Interpretation und Auftreten der Kontinuitätsgleichung

Abschließend halten wir zu Interpretation und Auftreten der betrachteten Kontinuitätsgleichung $u_t + \operatorname{div}(u\vec{v}) \equiv 0$ fest:

- Sie modelliert Massen-/Ladungserhaltung in physikalischen Prozessen. (Z.B. ist Ladungserhaltung $\rho_t + \operatorname{div} \vec{j} \equiv 0$ Teil der Maxwell-Gleichungen, denn aus diesen folgt $\rho_t = \varepsilon_0(\operatorname{div} \vec{E})_t = \varepsilon_0 \operatorname{div}(\vec{E}_t) = -\operatorname{div} \vec{j}$.)
- Sie reduziert sich bei konstanter Dichte $u \equiv \text{const}$ zu $\operatorname{div} \vec{v} \equiv 0$. (Tritt z.B. als Inkompressibilität in den Navier-Stokes-/Euler-Gleichungen auf.)
- Sie ergibt bei konstantem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} \equiv a \in \mathbb{R}^n$ die lineare Transportgleichung $u_t + a \cdot \nabla u \equiv 0$.
- Sie ergibt bei Zusammenhang $u\vec{v} = -C \nabla u$ mit Konstante $C > 0$ die Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung $u_t - C \Delta u \equiv 0$. (Hierbei hat $u\vec{v} = -C \nabla u$ für Konzentration bzw. Temperatur u Interpretation als Ficksches Gesetz der Diffusion bzw. Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung. Im stationären Fall erhalte ähnlich für elektrische Spannung u aus $\operatorname{div} \vec{j} \equiv 0$ und Ohmschen Gesetz $\vec{j} = -C \nabla u$ der Leitfähigkeit die Laplace-Gleichung.)

2.2 Die Methode der Charakteristiken

Die **Methode der Charakteristiken** reduziert skalare **partielle DGL** erster Ordnung auf zugrundeliegende **gewöhnliche DGL**. Hierdurch erhält man eine prinzipielle Chance, mit Methoden aus DGL I explizit zu lösen.

Einleitendes Beispiel

Bei der **linearen Beispiel-PDG** (Ordnung 1, skalar, homogen)

$$\underbrace{2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - 4x u(x, y) = 0}_{= (2, -1) \cdot \nabla u(x, y)} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

spielt nur die Ableitung von u in Richtung des Vektors $(2, -1)$ eine Rolle. Deshalb betrachte (parametrisierte) Geraden

$$\gamma_{(x_0, y_0)}(t) := (x_0, y_0) + t(2, -1) = (x_0 + 2t, y_0 - t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit beliebigem Aufpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und Richtungsvektor $(2, -1) \in \mathbb{R}^2$.

Für $\nu_{(x_0, y_0)}(t) := u(x_0 + 2t, y_0 - t)$ (d.h. u entlang der Geraden) gilt

$$(\nu_{(x_0, y_0)})'(t) = 2 \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + 2t, y_0 - t) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0 + 2t, y_0 - t).$$

Deshalb ergibt die **partielle DGL für u** folgende **gewöhnliche DGL für ν** :

$$\nu'(t) - 4(x_0 + 2t) \nu(t) = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Einleitendes Beispiel (Fortsetzung)

Tritt zur PDG eine sogenannte Cauchy-Bedingung (z.B. AB), die $u(x_0, y_0)$ für manche $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vorgibt, so erhalte das AWP

$$\nu'(t) - 4(x_0+2t)\nu(t) = 0 \quad \text{mit AB } \nu(0) = u(x_0, y_0).$$

DGL I (Lösungsformel!) gibt als **Lösung des AWP der gewöhnlichen DGL**:

$$u(x_0+2t, y_0-t) = \nu_{(x_0, y_0)}(t) = u(x_0, y_0) e^{(x_0+2t)^2 - x_0^2}.$$

Liegt etwa eine AB der einfachen Form

$$u(x_0, 0) = u_0(x_0) \quad \text{für } x_0 \in \mathbb{R}$$

vor, so nutze das vorige Ergebnis für $y_0 = 0$ und bekomme mit $x = x_0+2t$, $y = y_0-t = -t$ als **Lösung des AWP der partiellen DGL**:

$$u(x, y) = u_0(x+2y) e^{x^2 - (x+2y)^2} = u_0(x+2y) e^{-4y^2 - 4xy}.$$

Flusslinien/charakteristische Kurven

Die allgemeine skalare lineare PDG der Ordnung 1 lautet

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}_{= a(x) \cdot \nabla u(x)} + b(x) u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \Omega$$

(über offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mit $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $b, f \in C^0(\Omega)$).

Die Geraden im Beispiel ersetze durch **Flusslinien/charakteristische Kurven** γ_{x_0} des Felds a : Nach dem Satz von Picard-Lindelöf aus DGL I existiert für jedes $x_0 \in \Omega$ die eindeutige Lösung $\gamma_{x_0} \in C^1(I_{x_0}, \Omega)$ des nichtlinearen AWP

$$\text{aus GDG } \gamma'(t) = a(\gamma(t)) \text{ für } t \in I_{x_0} \quad \text{mit AB } \gamma(0) = x_0$$

auf einem größten Existenzintervall I_{x_0} für eine Lösung mit Werten in Ω . Flusslinien berühren oder schneiden sich nie (aber $\gamma_{x_0}(t) = \gamma_{\gamma_{x_0}(s)}(t-s)$).

(Die Gesamtheit $\Phi(t, x_0) := \gamma_{x_0}(t)$ aller γ_{x_0} heißt übrigens der **Fluss** von a . Für diesen lauten die GDG $\partial_t \Phi(t, x_0) = a(\Phi(t, x_0))$ und die ABen $\Phi(0, x_0) = x_0$.)

Die Methode der Charakteristiken im linearen Fall

Prinzip (Methode der Charakteristiken für lineare PDG)

Für Ω , a , b , f , γ_{x_0} , I_{x_0} wie zuvor und $u \in C^1(\Omega)$ sind **äquivalent**:

(1) u löst die **lineare PDG** $a(x) \cdot \nabla u(x) + b(x)u(x) = f(x)$ für $x \in \Omega$.

(2) Für jedes $x_0 \in \Omega$ löst ν_{x_0} mit $\boxed{\nu_{x_0}(t) := u(\gamma_{x_0}(t))}$ die **lineare GDG**

$$\nu'(t) + b(\gamma_{x_0}(t))\nu(t) = f(\gamma_{x_0}(t)) \quad \text{für } t \in I_{x_0}.$$

Dies bedeutet: **Die PDG reduziert sich auf GDG entlang der Flusslinien.**

Beweis: Aus $\nu_{x_0}(t) = u(\gamma_{x_0}(t))$ erhalte mit Kettenregel und Flusslinien-GDG allgemein (vgl. auch einleitendes Beispiel)

$$\nu'_{x_0}(t) = \gamma'_{x_0}(t) \cdot \nabla u(\gamma_{x_0}(t)) = a(\gamma_{x_0}(t)) \cdot \nabla u(\gamma_{x_0}(t)).$$

Damit ergibt die PDG an der Stelle $x = \gamma_{x_0}(t)$ die GDG, und umgekehrt ergeben die GDG die PDG, weil jedes $x \in \Omega$ die Form $x = \gamma_{x_0}(t)$ hat (tatsächlich $x = \gamma_x(0)$, aber auch spezielle x_0 wie auf der Folgefolie reichen). \square

Cauchy-Bedingungen und rechnerisches Vorgehen

Die bei skalaren PDG der Ordnung 1 sinnvolle **Cauchy-Bedingung** lautet

$$u(x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in S.$$

Dabei gegeben: Kurve ($n=2$), Fläche ($n=3$), allgemein Hyperfläche $S \subset \Omega$, die jede Flusslinie genau einmal schneidet, und Funktion $u_0: S \rightarrow \mathbb{R}$ auf S .

Wird die PDG so ergänzt, so betrachte die GDG für γ und ν nur für $x_0 \in S$ und letztere entsprechend ergänzt um die AB

$$\nu(0) = u_0(x_0).$$

Rechnerisches Vorgehen bei Methode der Charakteristiken:

- Löse AWP für Flusslinien γ_{x_0} mit $x_0 \in S$.
- Löse AWP für ν_{x_0} mit $x_0 \in S$, erhalte $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t)$ als Term in t, x_0 .
- Löse $x = \gamma_{x_0}(t)$ nach (t, x_0) auf, erhalte Lösung $u(x)$ als Term in x .

Beispiel zur Methode der Charakteristiken (linearer Fall)

Betrachte als Beispiel das **Cauchy-Problem zur linearen PDG**

$$y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + u(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R},$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2} \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

Löse schrittweise (wobei $x_0 > 0$ und $\gamma_{x_0} = \gamma_{(x_0, 0)}$, $\nu_{x_0} = \nu_{(x_0, 0)}$ abgekürzt):

lese ab \rightsquigarrow AWP für Flusslinien: $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \gamma(t)$ mit AB $\gamma(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

löse \rightsquigarrow Flusslinien: $\gamma_{x_0}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos t \\ -x_0 \sin t \end{pmatrix}$ für $|t| < \frac{\pi}{2}$

lese ab \rightsquigarrow AWP für ν_{x_0} : $\nu'(t) + \nu(t) = 0$ mit AB $\nu(0) = e^{-x_0^2}$

löse \rightsquigarrow Lösung: $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t) = e^{-t-x_0^2}$

Löse noch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma_{x_0}(t)$ auf zu $t = -\arctan(y/x)$ und $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

setze ein \rightsquigarrow **Lösung Cauchy-Problem zur PDG:** $u(x, y) = e^{\arctan(y/x) - x^2 - y^2}$

Charakteristiken-Methode bei linearer Transportgleichung

Als weiteres Beispiel betrachte das **AWP** zur linearen Transportgleichung

$$\begin{aligned} u_t(t, x) + a(t, x) \cdot \nabla u(t, x) &= 0 && \text{für } (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0, x) &= u_0(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Setze an wie folgt (wobei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma_{x_0} = \gamma_{(0, x_0)}$, $\nu_{x_0} = \nu_{(0, x_0)}$ abgekürzt):

lese ab \rightsquigarrow AWP für Flusslinien: $\gamma'(t) = (1, a(\gamma(t)))$ mit AB $\gamma(0) = (0, x_0)$

führt auf \rightsquigarrow $\gamma_{x_0}(t) = (t, \tilde{\gamma}_{x_0}(t))$ und $\tilde{\gamma}'(t) = a(t, \tilde{\gamma}(t))$ mit AB $\tilde{\gamma}(0) = x_0$

lese ab \rightsquigarrow AWP für ν_{x_0} : $\nu'(t) = 0$ mit AB $\nu(0) = u_0(x_0)$

löse \rightsquigarrow $u(t, \tilde{\gamma}_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t) = u_0(x_0)$, d.h. **u konstant entlang Flusslinien**

Nun ist noch $x = \tilde{\gamma}_{x_0}(t)$ aufzulösen. Dies geht z.B. für konstantes a mit zugehörigen $\tilde{\gamma}_{x_0}(t) = x_0 + ta$ und überführt dann $u(t, x_0 + ta) = u_0(x_0)$ in die schon aus Kapitel 1 bekannte Lösungsformel $u(t, x) = u_0(x - ta)$.

Die Methode der Charakteristiken im quasilinearen Fall

Im quasilinearen Fall funktioniert die Methode der Charakteristiken ähnlich:

Prinzip (Methode der Charakteristiken für quasilineare PDG)

Seien Ω offen in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $a \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $b \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$.
Dann sind für $u \in C^1(\Omega)$ **äquivalent**:

- (1) u löst die **quasilineare PDG** $a(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x, u(x))$ für $x \in \Omega$.
- (2) Für jedes $x_0 \in \Omega$ ist mit der Lösung $(\gamma_{x_0}, \nu_{x_0}) \in C^1(I_{x_0}, \Omega \times \mathbb{R})$ (auf größten Existenzintervall I_{x_0}) des **nichtlinearen GDG-Systems**

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= a(\gamma(t), \nu(t)) & \text{mit ABen} & \gamma(0) = x_0 \\ \nu'(t) &= b(\gamma(t), \nu(t)) & & \nu(0) = u(x_0) \end{aligned}$$

der Zusammenhang $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t)$ für $t \in I_{x_0}$ erfüllt.

Im linearen Fall war speziell $a(x, y) = a_0(x)$ und $b(x, y) = -b_0(x)y + f(x)$. Dann betraf die erste GDG nur γ , nicht ν und konnte vorab gelöst werden, die zweite GDG war linear in ν . Diese Features hat man im quasilinearen Fall nicht mehr.

Rechnerisches Vorgehen und Beweis (quasilinearer Fall)

Auch im quasilinearen Fall ist neben der PDG eine Cauchy-Bedingung $u(x) = u_0(x)$ für $x \in S$ mit geeigneter Hyperfläche $S \subset \Omega$ und $u_0: S \rightarrow \mathbb{R}$ sinnvoll, und das **rechnerische Vorgehen** ändert sich nur wenig:

- Löse gekoppeltes AWP für $(\gamma_{x_0}, \nu_{x_0})$ mit $x_0 \in S$, erhalte $\gamma_{x_0}(t)$ und $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t)$ als Terme in t, x_0 .
- Löse $x = \gamma_{x_0}(t)$ nach (t, x_0) auf, erhalte Lösung $u(x)$ als Term in x .

Beweis des allgemeinen Prinzips: Für festes x_0 kürze GDG-Lösungen als $\gamma = \gamma_{x_0}$ und $y = y_{x_0}$ auf $I = I_{x_0}$ ab, zeige die zwei Implikationen einzeln:

(2) \implies (1) (i.W. wie linearer Fall): Mit $u(\gamma) = \nu$ rechne (an Stellen $t \in I$):

$$\begin{aligned} a(\gamma, u(\gamma)) \cdot \nabla u(\gamma) &= a(\gamma, \nu) \cdot \nabla u(\gamma) \stackrel{\text{GDG für } \gamma}{=} \gamma' \cdot \nabla u(\gamma) \\ &= [u(\gamma)]' = \nu' \stackrel{\text{GDG für } \nu}{=} b(\gamma, \nu) = b(\gamma, u(\gamma)). \end{aligned}$$

Da jedes $x \in \Omega$ Form $x = \gamma_{x_0}(t)$ (tatsächlich $x = \gamma_x(0)$) hat, erhalte PDG.

Beweis (quasilinearer Fall; Fortsetzung)

Beweis-Fortsetzung:

(1) \implies (2) (wobei nun Nachweis $u(\gamma) = \nu$ etwas subtiler): Für

$$\psi(t) := \nu(t) - u(\gamma(t)) \quad \text{für } t \in I$$

erhalte

$$\psi' = \nu' - \gamma' \cdot \nabla u(\gamma) = b(\gamma, \nu) - a(\gamma, \nu) \cdot \nabla u(\gamma).$$

Beobachte: Wüsste man $\nu = u(\gamma)$ und könnte ν durch $u(\gamma)$ ersetzen, so würde die rechte Seite nach PDG Null. Aber $u(\gamma) = \nu$ ist gerade zu zeigen.

Jedenfalls ist $\psi(0) = 0$ gemäß ABen. Ist $\psi \not\equiv 0$, so gibt es „letzte Stelle“ $t_* \in I$ mit $\psi(t_*) = 0$. Nutze dann $|\partial_y b(x, y) - \partial_y a(x, y) \cdot \nabla u(x)| \leq C$ für (x, y) nahe $(\gamma(t_*), \nu(t_*))$ mit Schranke C , bekomme für t nahe t_* durch Abschätzung des Ersetzungsfehlers $|\psi'| \leq C|\nu - u(\gamma)| = C|\psi|$. Mit dem nächsten Lemma folgere $\psi \equiv 0$ nahe t_* , was der Wahl von t_* als „letzte Stelle“ widerspricht. Es bleibt nur $\psi \equiv 0$ und m.a.W. $u(\gamma) = \nu$ auf I . \square

Lemma für den vorigen Beweis (quasilinearer Fall)

Lemma

Genügt $\psi \in C^1(I)$ einer Differentialungleichung $|\psi'| \leq C|\psi|$ auf Intervall I mit $C \in [0, \infty)$, so folgt aus $\psi(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$ schon $\psi \equiv 0$ auf I .

Beweis: Angenommen es ist $\psi(b) \neq 0$ für ein $b \in I$. Sei $t_* \in I$ die zu b nächste Stelle mit $\psi(t_*) = 0$. Im Fall $t_* < b$ erhalte für $t_* < a \leq b$ stets

$$\log \frac{|\psi(b)|}{|\psi(a)|} = \int_a^b \frac{d}{dt} \log |\psi(t)| dt = \int_a^b \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} dt \leq \int_a^b \frac{|\psi'(t)|}{|\psi(t)|} dt \leq C(b-a),$$

also $|\psi(b)| \leq e^{C(b-a)} |\psi(a)|$. Für $a \rightarrow t_*$ folgt $|\psi(b)| \leq e^{C(b-t_*)} |\psi(t_*)| = 0$ und widerspricht $\psi(b) \neq 0$. Falls $t_* > b$, erhalte mit $b \leq a < t_*$ und $-\int_b^a \dots$ auf ähnliche Weise einen Widerspruch. Also ist $\psi(b) = 0$ für alle $b \in I$. \square

Bemerkung: Das Lemma ist Spezialfall des sogenannten Gronwall-Lemmas, das Lösungen zu Differentialungleichungen durch Lösungen zugehöriger GDG abschätzt. (Hier ist die GDG $\psi' = \psi$ mit AB $\psi(t_0) = 0$, und das hat nur $\psi \equiv 0$ als Lösung.)

Beispiel zur Methode der Charakteristiken (quasilinear)

Betrachte als Beispiel das **Cauchy-Problem zur PDG**

$$x u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + 2y u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -u(x, y)^2 \quad \text{für } (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, 2x-1) = 1 \quad \text{für } 0 < x < 1$$

mit dem sinnvollem Gebiet $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y < x^2\}$ (vgl. unten).

Löse schrittweise (wobei $0 < x_0 < 1$ und $\gamma_{x_0} = \gamma_{(x_0, 2x_0-1)}$, $\nu_{x_0} = \nu_{(x_0, 2x_0-1)}$):

\rightsquigarrow ^{lese ab} PDG ist quasilinear mit $a(x, y, w) = (xw, 2yw)$, $b(x, y, w) = -w^2$.

\rightsquigarrow ^{lese ab} Zugehöriges **charakteristisches GDG-System** lautet

$$\gamma_1' = \nu \gamma_1 \quad \text{mit AB } \gamma_1(0) = x_0,$$

$$\gamma_2' = 2\nu \gamma_2 \quad \text{mit AB } \gamma_2(0) = 2x_0 - 1,$$

$$\nu' = -\nu^2 \quad \text{mit AB } \nu(0) = 1.$$

\rightsquigarrow ^{löse für} ν $u(\gamma_{x_0}(t)) = \nu_{x_0}(t) = (t+1)^{-1}$

Beispiel zur Methode der Charakteristiken (Fortsetzung)

vereinfache für γ \rightsquigarrow

$$\gamma_1'(t) = (t+1)^{-1} \gamma_1(t) \quad \text{mit AB } \gamma_1(0) = x_0,$$

$$\gamma_2'(t) = 2(t+1)^{-1} \gamma_2(t) \quad \text{mit AB } \gamma_2(0) = 2x_0 - 1$$

löse für γ \rightsquigarrow charakteristische Kurven: $\gamma_{x_0}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t+1) \\ (2x_0-1)(t+1)^2 \end{pmatrix}$

Nun bemerke $I_{x_0} = (-1, \infty)$, eliminiere bei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma_{x_0}(t)$ erst x_0 durch $\frac{2x}{t+1} = 2x_0 = \frac{y}{(t+1)^2} + 1$ und löse dann eine quadratische Gleichung in t zu $t = x - 1 + \sqrt{x^2 - y}$ (nur Vorzeichen „+“ vor Wurzel, weil $\frac{x}{t+1} = x_0 < 1$ ist).

$\nu_{x_0}(t) = (t+1)^{-1}$ \rightsquigarrow Lösung Cauchy-Problem zur PDG: $u(x, y) = (x + \sqrt{x^2 - y})^{-1}$

Geometrischer Hintergrund: γ_{x_0} durchläuft den Parabelast $\{(x, a_{x_0} x^2) : 0 < x < \infty\}$ mit $a_{x_0} := (2x_0 - 1)/x_0^2$ in Richtung weg vom Ursprung, wobei für $0 < x_0 < 1$ alle $a_{x_0} \in (-\infty, 1)$ realisiert werden. Alle Äste zusammen bilden das eingangs definierte Ω , auf dem man das Problem dieses Beispiels gerade noch lösen kann.

Übrigens: Teilt man die PDG dieses Beispiels durch $u \neq 0$, ist man zurück beim linearen Fall. Dies ändert die Parametrisierungen γ_{x_0}, ν_{x_0} , aber nicht die Geometrie.

Schlussbemerkungen zur Methode der Charakteristiken

Schlussbemerkungen zur Charakteristiken-Methode bei $a(\cdot, u) \cdot \nabla u = b(\cdot, u)$:

- Für $a(x, w)$ unabhängig von w (semilinearer Fall) betrachte erst die GDG für γ , die dann unabhängig von ν sind. Für $b(x, w)$ unabhängig von x (wie im vorigen Beispiel) betrachte erst die GDG für ν , die dann unabhängig von γ ist.
- Im Allgemeinen können die GDG aber voll gekoppelt sein, und man kann das **GDG-System für (γ, ν) nicht unbedingt explizit lösen**.
- Auch das **Auflösen von $x = \gamma_{x_0}(t)$ kann** nicht explizit möglich sein oder prinzipiell **scheitern**, weil sich etwa verschiedene γ_{x_0} schneiden. In guten Fällen ist zumindest lokales Auflösen möglich, und man kann mit der Methode lokale Existenzsätze beweisen; dazu aber keine Details!
- **Weitere quasilineare Fälle und Beispiele** folgen **im nächsten Abschnitt**.

Prinzipiell erfasst die Methode sogar den **voll nichtlinearen Fall**. Das charakteristische GDG-System wird dann aber noch komplizierter und beinhaltet zusätzlich Platzhalter für Ableitungen von u . Auch hierzu keine Details!

2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen

Skalare Erhaltungsgleichungen sind Erster-Ordnung-PDG der Form

$$u_t + \operatorname{div}_x(\vec{F}(u)) \equiv 0 \quad \text{auf } (0, T) \times \Omega$$

für eine skalare Funktion u der Variablen $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ bei gegebenen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T > 0$ und $\vec{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Die Gleichung ist **quasilinear** (Kettenregel!) und entspricht für $u \neq 0$ der Kontinuitätsgleichung aus 2.1 mit von u abhängigem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(t, x) := \frac{\vec{F}(u(t, x))}{u(t, x)}$. Daher gilt nach 2.1 **Massenerhaltung** in mitbewegten Teilgebieten (und z.B. bei RB $\vec{v} \equiv 0$ auf $(0, T) \times \partial\Omega$ auch in ganz $(0, T) \times \Omega$).

Wir behandeln **hier nur Raumdimension $n = 1$** , der Einfachheit halber mit $\Omega = \mathbb{R}$ und $T = \infty$. Es geht also (in zwei äquivalenten Formulierungen) um

$$\boxed{u_t + (F(u))_x \equiv 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{u_t + f(u) \cdot u_x \equiv 0} \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

bei gegebenem $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit **Entsprechung $F' = f$** .

Die Burgers-Gleichung

Für $F(w) := aw$ bzw. $f \equiv a$ ergibt sich die lineare Transportgleichung.

Uns interessiert nun aber mehr der **nichtlineare Modellfall** $F(w) := \frac{1}{2}w^2$ bzw. $f(w) := w$ der sogenannten **Burgers-Gleichung**

$$\boxed{u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x \equiv 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{u_t + u \cdot u_x \equiv 0} \quad \text{auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}$$

Die Burgers-Gleichung dient als **grundlegendes, nichtlineares 1d-Modell** für die Zeitentwicklung einer Massendichte u mit möglichen Stoßwellen, z.B. Überschallwellen in Luft. (Eine Nichtlinearität von ähnlichem Typ in 3d ist übrigens der konvektive Term der Navier-Stokes- bzw. Euler-Gleichungen.)

Methode der Charakteristiken bei Erhaltungsgleichungen

Wende für das **Cauchy-Problem** aus Erhaltungsgleichung und AB

$$u_t + f(u) \cdot u_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, \cdot) = u_0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

nun die **Methode der Charakteristiken** an (wie früher mit Index x_0 statt $(0, x_0)$):

- charakteristische GDG: $\gamma' = (1, f(\nu))$ mit AB $\gamma(0) = (0, x_0)$,
 $\nu' \equiv 0$ mit AB $\nu(0) = u_0(x_0)$,

- Lösung: $\nu_{x_0} \equiv u_0(x_0)$ konstant, also **u konstant entlang γ_{x_0}** ,

$$\gamma_{x_0}(t) = (t, x_0 + t f(u_0(x_0))) \text{ (charakteristische Geraden).}$$

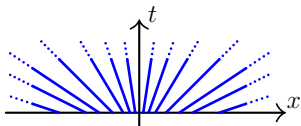
Erhalte die implizite Lösungsformel $u(t, x_0 + t f(u_0(x_0))) = u_0(x_0)$. **Ob man auflösen kann und wirklich eine Lösung u bekommt, kommt auf f, u_0 an!**

(Die „Geschwindigkeit“ $f(u_0(x_0))$ von γ_{x_0} ist im nichtlinearen Fall übrigens nicht gleich der in 2.1 modellierten Teilchengeschwindigkeit $\vec{v}(\gamma_{x_0}) \equiv \frac{F(u_0(x_0))}{u_0(x_0)}$.)

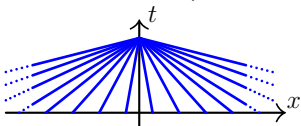
Beispiellösungen der Burgers-Gleichung

Im Modellfall der Burgers-Gleichung $u_t + u \cdot u_x \equiv 0$ mit $f(w) = w$ erhalte folgende Beispiele (jeweils u konstant auf gezeigten charakterist. Geraden):

- Für $u_0(x) := x$ löse $u(t, (1+t)x_0) = x_0$ auf zu $u(t, x) = \frac{x}{1+t}$ und erhalte eine für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definierte Lösung.



- Für $u_0(x) = -x$ löse $u(t, (1-t)x_0) = -x_0$ auf zu $u(t, x) = \frac{-x}{1-t}$, erhalte eine Lösung mit Singularität bei $t = 1$ (und gegensätzlichem VZ für $t > 1$).



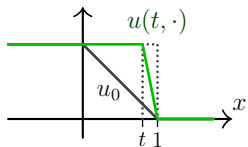
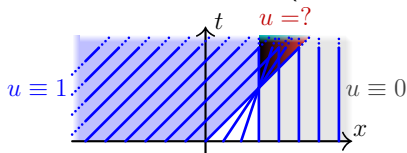
Das Problem dieses Beispiels ist, dass sich alle charakteristischen Geraden $\gamma_{x_0}(t) = (t, (1-t)x_0)$ in $(t, x) = (1, 0)$ schneiden.

Beispiellösungen der Burgers-Gleichung (Fortsetzung)

Ähnlich dem vorigen Beispiel, aber relevanter (da $u_0 \geq 0$ beschränkt) ist:

- Für $u_0(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ 1-x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \geq 1 \end{cases}$ erhalte mit $u(t, x) = \begin{cases} 1 & , x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & , t < x < 1 \\ 0 & , x \geq 1 \end{cases}$

nur für $t < 1$ eine Lösung (für $t \geq 1$ Konflikt in Fallunterscheidung).



All diejenigen γ_{x_0} mit $x_0 \in [0, 1]$ schneiden sich in $(t, x) = (1, 1)$.

(Die Knickstellen von u_0 bei $x = 0$ und $x = 1$ bzw. von u bei $x = t$ und $x = 1$ sind dagegen nicht wesentlich und nicht ursächlich für das Problem.)

Im Folgenden führen wir eine neue Art Lösung ein, die auch für $t \geq 1$ Sinn macht und das Problem dieses Beispiels und ähnlicher Fälle behebt.

Testfunktionen und partielle Integration

Bezeichne ein $\varphi \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$ mit $\varphi \equiv 0$ außerhalb $[0, M] \times [-M, M]$ für ein $M \in [0, \infty)$ (d.h. grob mit „Nullrandwerten bei ∞ “) ab jetzt als **Testfunktion**. Für solche φ und eine Lösung u zu $u_t + (F(u))_x \equiv 0$ mit $u(0, \cdot) = u_0$ rechnet man (zwecks Übersicht ohne Argumente (t, x) notiert)

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u_t + (F(u))_x] \varphi \, dx \, dt \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty u_t \varphi \, dt \right] dx + \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (F(u))_x \varphi \, dx \right] dt \\
 &\stackrel{\text{pl}}{=} \int_{-\infty}^\infty \left[-u(0, x) \varphi(0, x) - \int_0^\infty u \varphi_t \, dt \right] dx + \int_0^\infty \left[- \int_{-\infty}^\infty F(u) \varphi_x \, dx \right] dt \\
 &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u \varphi_t + F(u) \varphi_x] \, dx \, dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \varphi(0, x) \, dx.
 \end{aligned}$$

(In der Rechnung kann man auch $\pm M$ statt $\pm \infty$ schreiben; das ändert nichts.)

Entscheidend ist, dass alle Ableitungen von u auf φ „abgewälzt“ werden.

Schwache Lösungen

Aufbauend auf der Rechnung macht nun folgende Festlegung Sinn.

Definition (schwache Lösungen)

Seien $F \in C^0(\mathbb{R})$ und $u_0 \in L_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{R})$. Eine **schwache Lösung** oder auch **Integrallösung** des Cauchy-Problems zur Erhaltungsgleichung

$$u_t + (F(u))_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, \cdot) = u_0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

ist eine Funktion $u \in L_{\text{lok}}^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$, so dass

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u \varphi_t + F(u) \varphi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) \varphi(0, x) dx = 0$$

für alle Testfunktionen φ (im Sinn der vorigen Folie) gilt.

Tatsächlich zeigt die vorausgehende Rechnung, dass jede „normale“ Lösung auch schwache Lösung ist. Daneben gibt es weitere schwache Lösungen:

$u_0 \in L_{\text{lok}}^\infty(\mathbb{R})$ bzw. $u \in L_{\text{lok}}^\infty([0, \infty) \times \mathbb{R})$ heißt i.W., dass $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[-M, M]$ bzw. $u: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem Rechteck $[0, M] \times [-M, M]$ mit $M \in [0, \infty)$ beschränkt ist.

Riemann-Probleme und Stoßwellen-Lösungen

Ein **Riemann-Problem** zu einer Erhaltungsgleichung ist ein Cauchy-Problem mit bei $x = 0$ unstetigen Anfangsdatum ($w_l, w_r \in \mathbb{R}$ Konstanten, $w_r \neq w_l$)

$$u_t + (F(u))_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < 0 \\ w_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Wir werden zeigen, dass eine **schwache Lösung** dieses Riemann-Problems die entsprechend **unstetige Funktion**

$$u(t, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < m \cdot t \\ w_r & \text{für } x > m \cdot t \end{cases}$$

ist, bei der $m \in \mathbb{R}$ durch die sogenannte **Rankine–Hugoniot-Bedingung**

$$m := \frac{F(w_r) - F(w_l)}{w_r - w_l}$$

bestimmt ist. Man interpretiert diese Lösung als **Stoßwelle**, bei der sich die durch $x = m \cdot t$ gegebene **Stoßfront** mit Geschwindigkeit m bewegt.

Stoßwellen-Lösungen der Burgers-Gleichung

Speziell im Fall $F(w) = \frac{1}{2}w^2$ besagt die Rankine–Hugoniot-Bedingung

$$m = \frac{\frac{1}{2}w_r^2 - \frac{1}{2}w_l^2}{w_r - w_l} = \frac{1}{2}(w_l + w_r).$$

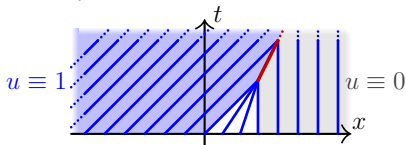
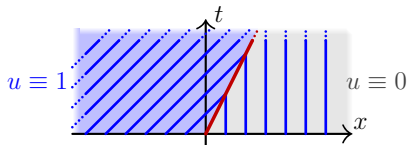
Also hat das **Riemann-Problem zur Burgers-Gleichung** (mit $w_l, w_r \in \mathbb{R}$)

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < 0 \\ w_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

als eine schwache Lösung die **Stoßwelle**

$$u(t, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < \frac{1}{2}(w_l + w_r) \cdot t \\ w_r & \text{für } x > \frac{1}{2}(w_l + w_r) \cdot t \end{cases}.$$

Für $w_l = 1, w_r = 0$ erhalte $m = \frac{1}{2}$ (Bild links). Im Beispiel der Folie 48 entwickelt sich ab $t = 1$ eine analoge Stoßwelle (t, x verschoben; Bild rechts).

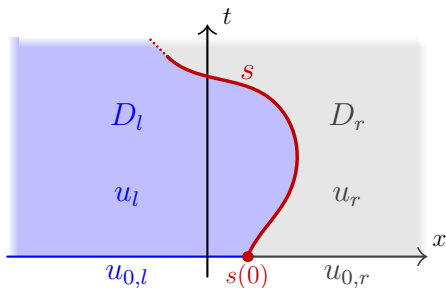


Allgemeine Stoßwellen-Lösungen

Allgemeine Stoßfronten beschreibe mit einer Funktion $s \in C^1([0, \infty))$.
 Unterteile $D := (0, \infty) \times \mathbb{R}$ in **Bereiche links/rechts der Stoßfront** $x = s(t)$

$$D_l := \{(t, x) \in D : x < s(t)\} \quad \text{und} \quad D_r := \{(t, x) \in D : x > s(t)\}$$

mit zugehörigen Funktionen $u_l \in C^1(\overline{D_l})$ und $u_r \in C^1(\overline{D_r})$ sowie
 Anfangsdaten $u_{0,l} \in C^0((-\infty, s(0)])$ und $u_{0,r} \in C^0([s(0), \infty))$.



Damit lassen sich die vorausgehenden Fälle verallgemeinern zu:

Allgemeine Stoßwellen-Lösungen (Fortsetzung)

Satz (über allgemeine Stoßwellen-Lösungen zu Erhaltungsgleichungen)

Für $s, D_l, D_r, u_l, u_r, u_{0,l}, u_{0,r}$ wie zuvor und $F \in C^1(\mathbb{R})$ sind **äquivalent**:

(1) Die (potentiell unstetige) Funktion

$$u(t, x) := \begin{cases} u_l & \text{für } x < s(t) \\ u_r & \text{für } x > s(t) \end{cases}$$

ist eine *schwache Lösung des Cauchy-Problems*

$$u_t + (F(u))_x \equiv 0 \text{ auf } D, \quad u(0, x) = \begin{cases} u_{0,l}(x) & \text{für } x < s(0) \\ u_{0,r}(x) & \text{für } x > s(0) \end{cases}$$

(2) u_l und u_r lösen die „normalen“ Cauchy-Probleme auf D_l und D_r mit $u_{0,l}$ und $u_{0,r}$, und es gilt die allgemeine *Rankine–Hugoniot-Bedingung*

$$s'(t) = \frac{F(u_r(t, x)) - F(u_l(t, x))}{u_r(t, x) - u_l(t, x)}$$

für alle (t, x) mit $x = s(t)$ und $u_r(t, x) \neq u_l(t, x)$.

Beweis des Satzes über Stoßwellen-Lösungen

Beweis des Satzes: Für Testfunktion φ untersuche l - und r -Terme von

$$\int_D [u \varphi_t + F(u) \varphi_x] \, d(t, x) + \int_{-\infty}^{\infty} u_0 \varphi(0, \cdot) \, dx$$

(vgl. Definition schwache Lösung). Löst u_r , so bekomme für r -Terme erst

$$\begin{aligned} & \int_{D_r} [u \varphi_t + F(u) \varphi_x] \, d(t, x) + \int_{s(0)}^{\infty} u_0 \varphi(0, \cdot) \, dx \\ &= \int_{D_r} \left[\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -F(u) \varphi \\ u \varphi \end{pmatrix} - \operatorname{rot} \begin{pmatrix} -F(u) \\ u \end{pmatrix} \varphi \right] \, d(t, x) + \int_{s(0)}^{\infty} u_0 \varphi(0, \cdot) \, dx, \end{aligned}$$

dann mit dem Greenschem Integralsatz (∂D_r ist Kurve c , die $\{0\} \times [s(0), \infty)$ und $\{(t, x) \in D : x = s(t)\}$ mit Tangentialvektoren $(0, -1)$ bzw. $(1, s')$ durchläuft)

$$\begin{aligned} &= \oint_c \begin{pmatrix} -F(u_r) \varphi \\ u_r \varphi \end{pmatrix} \cdot d(t, x) - \int_{D_r} [u_t + (F(u))_x] \varphi \, d(t, x) + \int_{s(0)}^{\infty} u_0 \varphi(0, \cdot) \, dx \\ &= \int_0^{\infty} [-F(u_r(t, s(t))) + s'(t) u_r(t, s(t))] \varphi(t, s(t)) \, dt. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes über Stoßwellen-Lösungen (Fortsetzung)

Löst u_l , so berechne die l -Terme in ähnlicher Weise zu

$$\int_0^\infty [F(u_l(t, s(t))) - s'(t)u_l(t, s(t))] \varphi(t, s(t)) dt.$$

Zusammenfassend ist für eine schwache Lösung u daher erforderlich, dass (zwecks Übersicht ohne Argumente t und $(t, s(t))$ notiert)

$$\int_0^\infty [-(F(u_r) - F(u_l)) + s'(u_r - u_l)] \varphi dt = 0$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Äquivalent ist

$$s'(t)(u_r(t, x) - u_l(t, x)) = F(u_r(t, x)) - F(u_l(t, x)) \quad \text{für } x = s(t)$$

oder nach Umformung

$$s'(t) = \frac{F(u_r(t, x)) - F(u_l(t, x))}{u_r(t, x) - u_l(t, x)} \quad \text{für } x = s(t) \text{ mit } u_r(t, x) \neq u_l(t, x).$$

Dies zeigt (2) \implies (1). Mit genauer Analyse, welche (weiteren) Integrale in der Rechnung Null sein müssen, ergibt sich auch (1) \implies (2). \square

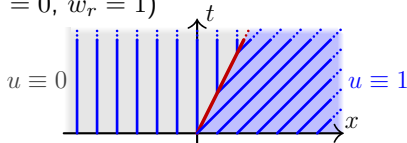
Verdünnungswellen (bei der Burgers-Gleichung)

Das Riemann-Problem zur Burgers-Gleichung

$$u_t + u \cdot u_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < 0 \\ w_r & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

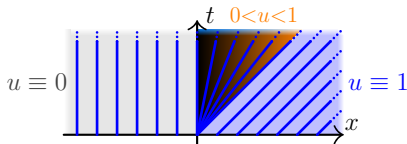
mit Konstanten $w_l, w_r \in \mathbb{R}$ hat im Fall $w_r > w_l$ neben der schon bekannten **Stoßwellen-Lösung** (Bild für $w_l = 0, w_r = 1$)

$$u(t, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < \frac{1}{2}(w_l + w_r) \cdot t \\ w_r & \text{für } x > \frac{1}{2}(w_l + w_r) \cdot t \end{cases}$$



als weitere schwache Lösung die **Verdünnungswelle** (Bild für $w_l = 0, w_r = 1$)

$$u(t, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < w_l \cdot t \\ \frac{x}{t} & \text{für } w_l \cdot t < x < w_r \cdot t \\ w_r & \text{für } x > w_r \cdot t \end{cases}$$



Also ist hier die Lösung nicht eindeutig!!!. Bei noch anderen Lösungen geht die Stoßfront zu irgendeiner Zeit $t_* > 0$ in eine Verdünnungswelle über.

Verdünnungswellen (bei allgemeinen Erhaltungsgleichungen)

Bei allgemeinen Erhaltungsgleichungen gibt es analoge **Verdünnungswellen**:

Satz (über Verdünnungswellen bei allgemeinen Erhaltungsgleichungen)

Für $w_l, w_r \in \mathbb{R}$ mit $w_r > w_l$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\inf_{\mathbb{R}} f' > 0$ (insbesondere f strikt wachsend, Umkehrfunktion f^{-1} existiert) erhält man durch

$$u(t, x) := \begin{cases} w_l & \text{für } x < f(w_l) \cdot t \\ f^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{für } f(w_l) \cdot t < x < f(w_r) \cdot t \\ w_r & \text{für } x > f(w_r) \cdot t \end{cases}$$

eine schwache Lösung des **Riemann-Problems zu einer Erhaltungsgleichung**

$$u_t + f(u) \cdot u_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = \begin{cases} w_l & \text{für } x < 0 \\ w_r & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

Im Modellfall der Burgers-Gleichung ist einfach $f(w) = w$ und $f^{-1}(\chi) = \chi$.

Beweis des Satzes über Verdünnungswellen

Zum Beweis des Satzes: Für das im Satz definierte u lese ab/prüfe:

- u erfüllt für $t = 0$ die AB (klar).
- u löst $u_t + f(u) \cdot u_x \equiv 0$ wo $x < f(w_l) \cdot t$ oder $x > f(w_r) \cdot t$ (da dort $u \equiv \text{const}$).
- Auch, wo $f(w_l) \cdot t < x < f(w_r) \cdot t$ ist, erhalte aus $u(t, x) = f^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)$ mit Kettenregel und Definition der Umkehrfunktion die Lösungseigenschaft:

$$\begin{aligned} [u_t + f(u) \cdot u_x](t, x) &= (f^{-1})'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) + f\left(f^{-1}\left(\frac{x}{t}\right)\right) \cdot (f^{-1})'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} \\ &= (f^{-1})'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{t}\right) = 0. \end{aligned}$$

- u kann bei $x = f(w_l) \cdot t$ und $x = f(w_r) \cdot t$ mit $t > 0$ stetig ergänzt werden (denn zum Beispiel für $x = f(w_l) \cdot t$ ist $f^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = f^{-1}(f(w_l)) = w_l$).

Auf dieser Basis kann man ähnlich wie beim Satz zu Stoßwellen vorgehen.

(Genauer: Nutze Green oder part. Int. auf Teilen von $\{(t, x) : |(t, x)| \geq \varepsilon\}$. Zeige, dass Integrale auf $\{(t, x) : |(t, x)| < \varepsilon\}$ klein sind, da u beschränkt und $|(u_t, u_x)|$ nahe $(0, 0)$ endlich integrierbar ist. Auf mehr Details sei hier verzichtet.) \square

(Nicht-)Eindeutigkeit und „physikalische“ Lösungen

Für $u_t + f(u) \cdot u_x \equiv 0$ (mit f wie im letzten Satz) halte fest:

- Wie gesehen ist die Lösung zum **Riemann-Problem mit $w_r > w_l$ nicht eindeutig**. Physikalisch ist unter den schwachen Lösungen die **Verdünnungswelle** (stetig!) **sinnvoller** als die Stoßwelle (unstetig!).
(Auch ist die Verdünnungswelle „ab Zeit $t_* > 0$ “ eindeutig, die Stoßwelle kann zu jeder Zeit $t_* > 0$ in eine Verdünnungswelle übergehen oder auch nicht.)
- Für das **Riemann-Problem mit $w_r < w_l$** hat die Stoßwelle aber keine Alternative, so dass man Unstetigkeit nicht generell ausschließen kann.
- „**Physikalisch**“ sind daher u.a. Stoßwellen mit $u_r(t, s(t)) \leq u_l(t, s(t))$ entlang der Stoßfront s und allgemein schwache Lösungen u mit

$$u_r(t, x) \leq u_l(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (*)$$

wobei $u_l(t, x) := \lim_{h \searrow 0} u(t, x-h)$ und $u_r(t, x) := \lim_{h \searrow 0} u(t, x+h)$ sei. Eine technische Variante von (*) charakterisiert sog. **Entropie-Lösungen** und gewinnt für solche auch mathematisch Eindeutigkeit.

Finales Beispiel für kombinierte Phänomene

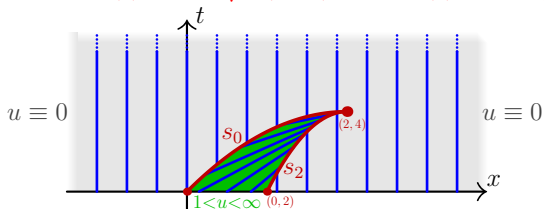
Für das Cauchy-Problem zur Burgers-Gleichung

$$u_t + u \cdot u_x \equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 2 \\ 2 - \frac{1}{2}x & \text{für } 0 < x < 2 \end{cases}$$

erhalte eine „schwache Lösung für $t < 2$ “ (Singularität $(t, x) = (2, 4)$) als

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < s_0(t) \text{ oder } x > s_2(t) \\ \frac{4-x}{2-t} & \text{für } s_0(t) < x < s_2(t) \end{cases}$$

mit zwei Stoßfronten $s_0(t) = 4 - \sqrt{8(2-t)}$ und $s_2(t) = 4 - \sqrt{2(2-t)}$.



Formel $\frac{4-x}{2-t}$ via Charakteristiken, danach s_0 und s_2 aus Rankine-Hugenoit-Bedingung per GDG-Lösen bestimmt! Front s_0 ist „unphysikalisch“.

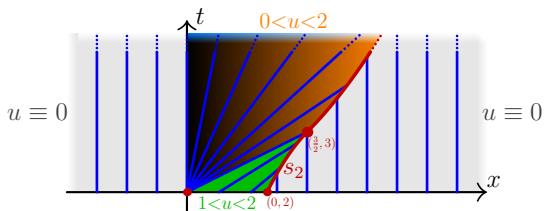
Finales Beispiel für kombinierte Phänomene (Fortsetzung)

Die „physikalische“ schwache Lösung des vorigen Problems ist dagegen

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > s_2(t) \\ \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x < \min\{2t, s_2(t)\} \\ \frac{4-x}{2-t} & \text{für } 2t < x < s_2(t) \end{cases}$$

mit Entwicklung einer Verdünnungswelle ab $(t, x) = (0, 0)$ und mit nur einer

Stoßfront $s_2(t) = \begin{cases} 4 - \sqrt{2(2-t)} & \text{für } t \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{6t} & \text{für } t \geq \frac{3}{2} \end{cases}$ (aus Rankine-Hugenoit).



Bei anderen Lösungen geht die Stoßfront s_0 der vorigen Folie erst zu einer Zeit $t_* \in (0, 2)$ in eine Verdünnungswelle über. Es gibt auch noch andere ...

Kapitel 3: PDG zweiter Ordnung

In diesem Kapitel werden die bereits in Kapitel 1 vorgestellten Fälle

- der Laplace- und Poisson-Gleichung (inklusive Eigenwertproblem),
- der Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung
- und der Wellengleichung

als drei Modellfälle für PDG zweiter Ordnung behandelt.

Im Vergleich zu PDG erster Ordnung erhält man völlig elementare Lösungsformeln nun seltener und eher nur für spezielle Fälle. Dennoch ist die Lösungstheorie vielfältig und beschreibt Lösungen recht allgemein durch (mehr oder weniger explizite) Integralformeln.

3.1 Die Laplace- und Poisson-Gleichung

Dieser Abschnitt behandelt **Laplace-Gleichung** und **Poisson-Gleichung**

$$\Delta u \equiv 0 \quad \text{und} \quad \Delta u = f \quad \text{auf offenem } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei **bis auf Weiteres immer** $n \geq 2$ sei. Neben die Gleichungen tritt oft wieder die bekannte **Dirichlet-RB** $u = g$ auf $\partial\Omega$.

Ein eigener Begriff für Lösungen der Laplace-Gleichung ist üblich:

Definition (harmonische Funktionen)

*Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt **harmonisch** auf offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wenn sie die Laplace-Gleichung $\Delta u \equiv 0$ auf Ω löst.*

Da die Laplace-Gleichung linear ist, prüft man problemlos (für $r, s \in \mathbb{R}$):

$$u \text{ und } v \text{ harmonisch auf } \Omega \implies ru + sv \text{ harmonisch auf } \Omega.$$

Speziell für $n = 2$ kann man (vgl. nächste Folie) harmonische Funktionen als Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen erhalten.

Geze harmonische Funktionen, harmonische Polynome

Beispiele für harmonische Funktionen u auf ganz \mathbb{R}^n , genannt ganze harmonische Funktionen, sind harmonische Polynome:

- Grad 0: alle konstante Funktionen, z.B. $u \equiv 1$,
- Grad 1: alle linearen Funktionen, z.B. $u(x) = x_i$,
- Grad 2: z.B. $u(x) = x_i^2 - x_j^2$ und $u(x) = x_i x_j$ mit $i \neq j$
($n = 2 \rightsquigarrow x^2 - y^2$ und xy Real- und Imaginärteil des holomorphen z^2),
- Grad 3: z.B. $u(x) = x_i^3 - 3x_i x_j^2$ und $u(x) = x_i x_j x_k$ mit $i \neq j \neq k \neq i$
($n = 2 \rightsquigarrow x^3 - 3xy^2$ Realteil des holomorphen z^3),
- Grad 4 und höher:

Kombinationen wie z.B. $x_1^3 - 3x_1 x_2^2 - 7x_2 x_3 + 4$ für $n = 3$ auch harmonisch!

Weitere ganze harmonische u , die keine Polynome sind:

- z.B. $u(x) = e^{x_i} \cos x_j$ und $u(x) = e^{x_i} \sin x_j$ mit $i \neq j$
($n = 2 \rightsquigarrow e^x \cos y$ und $e^x \sin y$ Real- und Imaginärteil des holomorphen e^z).

Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

Definition/Proposition (Fundamentallösung der Laplace-Gleichung)

Die Funktion Φ mit

$$\Phi(x) := \frac{1}{2\pi} \log |x| \quad \text{für } n = 2, \quad \Phi(x) := -\frac{1}{n(n-2)\alpha_n} |x|^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3$$

(mit Maß α_n der Einheitskugel $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ in \mathbb{R}^n ; $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \frac{4}{3}\pi$)

ist auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ harmonisch und heißt die **Fundamentallösung der Laplace-Gleichung**. Alle rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen $u(x) = h(|x|)$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ haben die Form $u(x) = a\Phi(x) + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

- Die Fundamentallösung Φ wird bei $x = 0$ **singulär** und lässt sich nicht auf ganz \mathbb{R}^n fortsetzen. Ihre Singularität ist prototypisch für harmonische Funktionen.
- Die Wahl der Vorfaktoren $\frac{1}{2\pi}$ bzw. $-\frac{1}{n(n-2)\alpha_n}$ scheint speziell, hat aber Vorteile: Sie vermeidet das explizite Auftreten derartiger Vorfaktoren im nächsten Satz und normalisiert auf $\int_{\partial B_1} \partial_\nu \Phi(x) \, dS(x) = 1$.
- Physikalisch entspricht Φ dem elektrischen Potential einer im Ursprung platzierten elektrischen Einheitsladung.

Herleitung der Fundamentallösung

Herleitung der Fundamentallösung und der Proposition: Berechne erst hilfsweise die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i} |x| = \frac{x_i}{|x|}$ und $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{|x|} = \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$. Damit erhalte für rotationssymmetrische $u(x) = h(|x|)$ sukzessive:

$$\begin{aligned}\partial_i u(x) &= h'(|x|) \frac{x_i}{|x|}, & \partial_i^2 u(x) &= h''(|x|) \frac{x_i^2}{|x|^2} + h'(|x|) \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}, \\ \Delta u(x) &= h''(|x|) \frac{|x|^2}{|x|^2} + h'(|x|) \frac{n|x|^2 - |x|^2}{|x|^3} = h''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} h'(|x|).\end{aligned}$$

Also ist u genau dann harmonisch, wenn h die GDG

$$h''(r) + \frac{n-1}{r} h'(r) = 0$$

löst. Die GDG-Lösungen erfüllen $h'(r) = c r^{1-n}$, sind also genau ($b, c \in \mathbb{R}$)

$$h(r) = c \log r + b \quad \text{für } n = 2, \quad h(r) = -\frac{c}{n-2} r^{2-n} + b \quad \text{für } n \geq 3.$$

Mit $u(x) = h(|x|)$ erhalte Form von Φ und Proposition (mit $a = n\alpha_n c$). \square

Lösungsformel für die Poisson-Gleichung

Lösungen der Poisson-Gleichung mit allgemeiner rechter Seite f kann man durch folgende Integralformel mit der Fundamentallösung Φ erhalten:

Satz (Lösung der Poisson-Gleichung durch Faltung mit Φ)

Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und ist $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$ beschränkt, so definiert

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) \, dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

eine **Lösung** $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta u = f \text{ auf } \mathbb{R}^n .$$

Der Beweis des Satzes ist etwas aufwändiger und wird hier nicht behandelt.

Die Formel des Satzes erlaubt **keine zusätzliche Vorgabe einer RB** (auf beschränktem, offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) und bleibt insofern unzufriedenstellend.

Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Satz (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ *harmonisch* auf beschränktem, offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(1) *Schwaches Maximumprinzip*: Es gilt

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

(2) *Starkes Maximumprinzip*: Ist Ω zusammenhängend und u nicht konstant, so gilt sogar

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Korollar 1: Für harmonisches u wie im Satz gilt auch

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Beweis: Für $x \in \Omega$ gilt entweder $|u(x)| = u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} |u|$ oder, da auch $-u$ harmonisch, $|u(x)| = -u(x) \leq \max_{\partial\Omega}(-u) \leq \max_{\partial\Omega} |u|$. \square

Folgerungen für das Dirichlet-Problem

Korollar 2 (Eindeutigkeitsatz für Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung)

Für beschränktes, offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$ hat das Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

Beweis: Sind u_1, u_2 zwei Lösungen, so ist $u_2 - u_1$ harmonisch mit $u_2 - u_1 \equiv 0$ auf $\partial\Omega$. Mit Korollar 1 folgt $|u_2(x) - u_1(x)| \leq 0$ für alle $x \in \Omega$, also ist $u_2 = u_1$. \square

Korollar 3: Für Lösungen u_1 und u_2 zu

$$\Delta u_i = f \text{ auf } \Omega, \quad u_i = g_i \text{ auf } \partial\Omega$$

(Ω, f, g_1, g_2 wie zuvor) gilt **stetige Abhängigkeit von Randdaten** im Sinn

$$\max_{\bar{\Omega}} |u_2 - u_1| \leq \max_{\partial\Omega} |g_2 - g_1|.$$

Beweis: Korollar 1 für harmonische Fktn. $u_2 - u_1$ mit $u_2 - u_1 = g_2 - g_1$ auf $\partial\Omega$. \square

Beweis des schwachen Maximumprinzips

Beweis des schwachen Maximumprinzips: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ setze $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$ und bemerke

$$\text{Spur}(D^2 u_\varepsilon(x)) = \Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Also ist $D^2 u_\varepsilon(x)$ nicht negativ semidefinit, u_ε hat keine Maximalstelle in Ω (notwendiges Kriterium) und erreicht $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon$ nur in $\partial\Omega$. Damit bekomme

$$u(x) \leq u_\varepsilon(x) < \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{y \in \partial\Omega} |y|^2 \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalte $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$. Die umgekehrte Ungleichung $u(x) \geq \min_{\partial\Omega} u$ zeige analog (z.B. mit Hilfe von $u_\varepsilon(x) := u(x) - \varepsilon|x|^2$). \square

Achtung! Auch wenn der Beweis zunächst ' $<$ ' ergibt, bleibt nach Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ nur ' \leq ' und man kann auf diese Weise nur das schwache, nicht das starke Maximumprinzip beweisen. Letzteres folgt erst später (mit Mittelwerteigenschaft).

Poisson-Kern und Poisson-Integralformel

Eine Integralformel löst das Dirichlet-Problems zur Laplace-Gleichung auf der Einheitskugel $B_1 := B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ in \mathbb{R}^n :

Definition (Poisson-Kern)

Der (n -dimensionale) *Poisson-Kern* K_P wird definiert als

$$K_P(x, y) := \frac{1}{n\alpha_n} \frac{1-|x|^2}{|y-x|^n} \quad \text{für } x \in B_1, y \in \partial B_1.$$

Satz (Poisson-Integralformel)

Für jedes $g \in C^0(\partial B_1)$ ist die eindeutige Lösung $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ zu

$$\Delta u \equiv 0 \text{ auf } B_1, \quad u = g \text{ auf } \partial B_1$$

gegeben durch die *Poisson-Integralformel (PIF)*

$$u(x) = \int_{\partial B_1} K_P(x, y) g(y) dS(y) \quad \text{für } x \in B_1.$$

(Das Integral mit dS ist für $n = 2$ ein Kurvenintegral erster Art, für $n = 3$ ein Oberflächenintegral erster Art, für $n \geq 3$ eine $(n-1)$ -dimensionale Entsprechung.)

Anmerkungen zur Poisson-Integralformel

- Die PIF drückt die Lösung u an einer beliebigen Stelle $x \in B_1$ als Integral nur der Randwerte g auf ∂B_1 aus.
- Mit der PIF ergibt sich auch die Existenz der Lösung.
(Deren Eindeutigkeit hatten wir sowieso schon aus dem Maximumprinzip.)
- Eine naheliegende Variante ist die PIF für das Dirichlet-Problem auf einer beliebigen Kugel $B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < r\}$ mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$:

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} K_P\left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-x_0}{r}\right) g(y) dS(y) \quad \text{für } x \in B_r(x_0).$$

- Für das Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung auf einem beliebigen glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt prinzipiell eine Variante der PIF (Greensche Lösungsformel) mit einem Ω abhängigen Kern anstelle K_P . Man kann diesen Kern aber nur für besonders einfache Ω explizit berechnen, neben Kugeln z.B. auch für den Halbraum $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

Beweis des Satzes zur Poisson-Integralformel

Zum Beweis des Satzes: Man benötigt drei Grundeigenschaften von K_P :

- (1) $K_P(x, y)$ ist harmonisch in $x \in B_1$ im Sinn von $\Delta_x(K_P(x, y)) = 0$ (direkt nachrechnen!).
- (2) Bei festem $x_* \in \partial B_1$ gilt $\lim_{x \rightarrow x_*} K_P(x, y) = 0$ für $y \in \partial B_1 \setminus \{x_*\}$ (Konvergenz gleichmäßig weg von x_* ; auch direkt nachrechnen!).
- (3) Es gilt $\int_{\partial B_1} K_P(x, y) dS(y) = 1$ für alle $x \in B_1$ (Beweis eher trickreich).

Aus (1) folgt, dass die PIF eine harmonische Funktion u mit $\Delta u \equiv 0$ auf B_1 definiert. Außerdem sieht man für $x_* \in \partial B_1$ an

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \int_{\partial B_1} K_P(x, y) g(y) dS(y) \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow x_*} \int_{\partial B_1} K_P(x, y) g(x_*) dS(y) \stackrel{(3)}{=} g(x_*),$$

dass mit $u(x_*) = g(x_*)$ auch die Dirichlet-RB $u = g$ auf ∂B_1 erfüllt ist. \square

Schlussbemerkungen zur Poisson-Integralformel

- Es gibt auch konstruktiv(er)e Herleitungen der PIF und ihrer Varianten.
- Prinzipiell lässt sich auch das [Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung](#)

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

nun lösen: Erhalte Lösung als $u = u_* + u_0$, wobei u_* Lösung zu $\Delta u_* = f$ auf Ω mit beliebigen Randwerten (Satz über Faltung mit Φ) und u_0 Lösung zu $\Delta u_0 \equiv 0$ auf Ω mit $u_0 = g - u_*$ auf $\partial\Omega$ (PIF oder Variante).

Die Mittelwerteigenschaft

Als bemerkenswerte Eigenschaft harmonischer Funktionen halten wir fest:

Korollar (Mittelwerteigenschaft)

Für auf $B_r(x_0)$ harmonisches $u \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^0(\overline{B_r(x_0)})$ gelten die Mittelwerteigenschaften ...

- ... auf der Vollkugel: $u(x_0) = \frac{1}{\alpha_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx,$
- ... auf der Kugeloberfläche: $u(x_0) = \frac{1}{n\alpha_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) \, dS(y).$

Die Division durch Volumen $\alpha_n r^n$ bzw. Oberflächeninhalt $n\alpha_n r^{n-1}$ der Kugel $B_r(x_0)$ macht die rechten Seiten zu Mittelwerten von u .

Beweise zu Mittelwerteigenschaft und starkem Max.prinzip

Beweis der Mittelwerteigenschaft: Die Version für die Kugeloberfläche ist die PIF für $B_r(x_0)$ mit $x = x_0$ (denn $K_P(0, \cdot) = \frac{1}{n\alpha_n}$). Mit dieser Version und Polarkoordinaten rechne

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx &= \int_0^r \int_{\partial B_\varrho(x_0)} u(y) \, dS(y) \, d\varrho \\ &= \int_0^r n\alpha_n \varrho^{n-1} u(x_0) \, d\varrho = \alpha_n r^n u(x_0), \end{aligned}$$

bekomme also auch die Version für die Vollkugel. □

Beweis des starken Max.prinzips: Für $M := \max_{\partial\Omega} u$ gilt $u \leq M$ auf Ω (schwaches Max.prinzip). Zeige nun: $u(x_0) = M$ in $x_0 \in \Omega \implies u$ konstant.

Für $B_r(x_0) \subset \Omega$ folgere aus $u \leq M$ und $\frac{1}{\alpha_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) \, dx = u(x_0) = M$ (Mittelwerteigenschaft), dass $u \equiv M$ auf $\overline{B_r(x_0)}$ konstant. Das Argument greift dann auch für jeden Punkt in $\overline{B_r(x_0)}$, und insgesamt folgt wie behauptet $u \equiv M$ auf ganz Ω (da per Voraussetzung zusammenhängend). □

Euklidischer Produktansatz bei $\Delta u \equiv 0$

Spezielle PDG-Lösungen auf \mathbb{R}^2 (oder $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) liefert der **Produktansatz**

$$u(x, y) = \varphi(x) \psi(y) \quad \text{mit Faktoren } \varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}).$$

Z.B. gibt Einsetzen in die **Laplace-Gleichung $\Delta u \equiv 0$ auf \mathbb{R}^2** (für $\varphi \neq 0 \neq \psi$)

$$\varphi''(x) \psi(y) + \varphi(x) \psi''(y) = 0 \quad \text{und äquivalent} \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}.$$

Da nach der Umformung links nur x und rechts nur y auftritt, muss $\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = K$ für eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ sein, also **folgen die GDG**

$$\varphi''(x) = K\varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi''(y) = -K\psi(y).$$

- (sehr einfacher) **Fall $K = 0$** : φ und ψ sind affine Funktionen.
 \rightsquigarrow Lösung $u(x, y)$ ist Linearkombination von xy , x , y und 1 .

Euklidischer Produktansatz bei $\Delta u \equiv 0$ (Fortsetzung)

- **Fall $K > 0$:** Mit $K = \omega^2$, $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$, erhalte allgemeine GDG-Lösungen (mit Konstanten $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$)

$$\varphi(x) = A_1 e^{\omega x} + A_2 e^{-\omega x}, \quad \psi(y) = B_1 \cos(\omega y) + B_2 \sin(\omega y)$$

und als Lösung der Laplace-Gleichung (mit Konstanten $C_{ij} = A_i B_j$)

$$u(x, y) = \varphi(x) \psi(y) = C_{11} e^{\omega x} \cos(\omega y) + C_{21} e^{-\omega x} \cos(\omega y) \\ + C_{12} e^{\omega x} \sin(\omega y) + C_{22} e^{-\omega x} \sin(\omega y)$$

- **Fall $K < 0$:** Mit $K = -\omega^2$, $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$, erhalte analog

$$u(x, y) = \varphi(x) \psi(y) = C_{11} \cos(\omega x) e^{\omega y} + C_{21} \sin(\omega x) e^{\omega y} \\ + C_{12} \cos(\omega x) e^{-\omega y} + C_{22} \sin(\omega x) e^{-\omega y}.$$

Ein ähnlicher Typ von Lösungen wurden bereits auf Folie 65 erwähnt.

Euklidischer Produktansatz bei $-\Delta u = \lambda u$

Das (Dirichlet-)Eigenwertproblem zum Laplace-Operator auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dreht sich um Lösungen $\neq 0$ des Dirichlet-Problems zur Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u = \lambda u \text{ auf } \Omega, \quad u \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Der Produktansatz $u(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$ führt hier analog auf konstante Terme $-\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda + \frac{\psi''(y)}{\psi(y)}$ und auf die GDG

$$\varphi''(x) = -K_1 \varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi''(y) = -K_2 \psi(y),$$

für Konstanten $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ mit $K_1 + K_2 = \lambda$. Anders als zuvor können nun für $\lambda > 0$ beide Vorfaktoren $K_1 = \omega_1^2$ und $K_2 = \omega_2^2$ positiv sein und beide GDG periodische Lösungen haben:

$$\varphi(x) = A_1 \cos(\omega_1 x) + A_2 \sin(\omega_1 x), \quad \psi(y) = B_1 \cos(\omega_2 y) + B_2 \sin(\omega_2 y).$$

Euklidischer Produktansatz bei $-\Delta u = \lambda u$ (Fortsetzung)

Genau für $\lambda = \omega_1^2 + \omega_2^2$ mit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ergeben sich Sinus-Lösungen

$$u(x, y) = C \sin(\omega_1 x) \sin(\omega_2 y)$$

(mit Konstante $C \in \mathbb{R}$) des (Dirichlet-)Eigenwertproblems auf dem Quadrat

$$-\Delta u = \lambda u \text{ auf } (0, \pi)^2, \quad u \equiv 0 \text{ auf } \partial((0, \pi)^2).$$

Fourier-Methoden (vgl. das Folgende) zeigen, dass diese (und ihre Linearkombinationen) die einzigen Lösungen $\neq 0$ sind. Man sagt daher:

- Die natürlichen Zahlen $\lambda = \omega_1^2 + \omega_2^2$ mit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Z}$ sind die (Dirichlet-)Eigenwerte des Laplace-Operators $-\Delta$ auf $(0, \pi)^2$. Die Folge dieser Eigenwerte beginnt 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, ...
- Die zu einem Eigenwert λ gehörigen Lösungen $\neq 0$ (hier Sinus-Lösungen und ihre Linearkombinationen bei festem λ) sind Eigenfunktionen von $-\Delta$.

Auch auf anderen Gebieten Ω sind die Eigenwerte von $-\Delta$ eine Folge positiver Zahlen (aber selten ganzzahlig).

Bemerkungen zum euklidischen Produktansatz

Bemerkungen zum euklidischen Produktansatz:

- Mit dem Produktansatz $u(x, y) = \varphi(x) \psi(y)$ erhält man i.A. nur spezielle Lösungen auf \mathbb{R}^2 oder $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und kann dementsprechend auch nur spezielle Randbedingungen auf $\partial\Omega$ erfüllen.
- Auf \mathbb{R}^n (oder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) kann man analog den Produktansatz $u(x) = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \dots \psi_n(x_n)$ machen. Ähnlich wie zuvor berechnet man dann spezielle Lösungen der Laplace-Gleichung auf \mathbb{R}^n und die Dirichlet-Eigenwerte und -funktionen von $-\Delta$ auf dem Würfel $(0, \pi)^n$ (oder allgemeiner auch auf Quadern in \mathbb{R}^n).

Fourier-(Sinus-)Reihen-Ansatz bei $\Delta u \equiv 0$

Alternativ kann man für PDG-Lösungen u auf \mathbb{R}^2 , bei denen $u(x, y)$ zum einen 2π -periodisch in x , zum anderen ungerade in x ist, den **Ansatz**

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(y) \sin(kx)$$

als **Fourier-(Sinus-)Reihe in x** mit y -abhängigen Koeffizienten $a_k \in C^2(\mathbb{R})$ machen (hier ohne Kosinus-Terme, da $u(x, y)$ ungerade in x angenommen!).

Einsetzen in die Laplace-Gleichung $\Delta u \equiv 0$ auf \mathbb{R}^2 führt auf

$$\sum_{k=1}^{\infty} [a_k''(y) - k^2 a_k(y)] \sin(kx) = 0.$$

Koeffizientenvergleich gibt die GDG $a_k''(y) = k^2 a_k(y)$ für a_k mit Lösungen

$$a_k(y) = b_k e^{ky} + \tilde{b}_k e^{-ky} \quad \text{bzw.} \quad a_k(y) = c_k \sinh(ky) + \tilde{c}_k \sinh(k(y-L))$$

(für freie Konstanten $b_k, \tilde{b}_k, c_k, \tilde{c}_k \in \mathbb{R}$ und beliebig gegebenes $L \in (0, \infty)$).

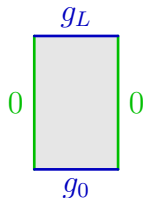
Fourier-(Sinus-)Reihen-Ansatz bei $\Delta u \equiv 0$ (Fortsetzung)

Die damit hergeleitete Lösungsformel in Form

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [c_k \sinh(ky) + \tilde{c}_k \sinh(k(y-L))] \sin(kx)$$

ist günstig für das **Dirichlet-Problem auf einem Rechteck**

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv 0 \text{ auf } (0, \pi) \times (0, L), \\ u(0, \cdot) &\equiv 0, & u(\pi, \cdot) &\equiv 0 \\ u(\cdot, 0) &= g_0, & u(\cdot, L) &= g_L \end{aligned}$$



mit $L > 0$ und $g_0, g_L \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade und 2π -periodisch (fortgesetzt).

Hierbei bestimme c_k, \tilde{c}_k aus den Fourier-Koeffizienten (FKen) von g_0, g_L :

- $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k \sinh(-kL) \sin(kx) \rightsquigarrow \tilde{c}_k \sinh(-kL)$ FKen von g_0
- $u(x, L) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sinh(kL) \sin(kx) \rightsquigarrow c_k \sinh(kL)$ FKen von g_L

So erhalte **bei diesem Dirichlet-Problem immer eine Lösung** u
(in Form einer unendlichen Funktionenreihe).

Beispiel zum Fourier-Reihen-Ansatz

Als **Beispiel** betrachte das **Dirichlet-Problem** zur Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &\equiv 0 \text{ auf } (0, \pi) \times (0, 1), \\ u(0, y) &\equiv 0, & u(\pi, y) &\equiv 0 & \text{für } 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, 1) &= x(\pi - x) & \text{für } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Die RB $u(x, 0) = 0$ bedeutet $g_0 \equiv 0$ und damit $\tilde{c}_k = 0$ für alle k . Die Lösungsformel (mit $L = 1$) vereinfacht sich daher zu

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sinh(ky) \sin(kx),$$

wobei für die Fourier-Koeffizienten $c_k \sinh(k)$ der *ungeraden* Funktion $g_1(x) = x(\pi - |x|)$ folgende Koeffizientenformel der Analysis gilt:

$$c_k \sinh(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_1(x) \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g_1(x) \sin(kx) \, dx.$$

Beispiel zum Fourier-Reihen-Ansatz (Fortsetzung)

Mit partiellen Integrationen und HDI berechne in diesem Beispiel konkret:

$$\begin{aligned}
 c_k \sinh(k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi-x) \sin(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \sin(kx) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi k} \left[\underbrace{-(\pi x - x^2) \cos(kx)}_{=0} \Big|_{x=0}^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos(kx) \, dx \right] \\
 &= \frac{2}{\pi k^2} \left[\underbrace{(\pi - 2x) \sin(kx)}_{=0} \Big|_{x=0}^\pi + 2 \int_0^\pi \sin(kx) \, dx \right] \\
 &= -\frac{4}{\pi k^3} \cos(kx) \Big|_{x=0}^\pi = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi k^3}, & k \text{ ungerade} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Damit erhalte die **Lösung u des Dirichlet-Problems** als Funktionenreihe:

$$u(x, y) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{8}{\pi k^3 \sinh(k)} \sinh(ky) \sin(kx) .$$

Bemerkungen zum Fourier-Reihen-Ansatz

Bemerkungen zum Fourier-Reihen-Ansatz:

- Von einem beliebigen Rechteck $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$ mit $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ kann man auf $(0, \pi) \times (0, L)$ transformieren.
(Verschieben, mit Faktor $\frac{\pi}{x_2 - x_1}$ skalieren, $L := \frac{\pi(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$ nehmen!)
- Beim **Eigenwertproblem** auf einem Quadrat/Rechteck/Würfel/Quader bestätigt ein ähnliches Vorgehen, dass alle Eigenwerte gefunden sind.
- Auch die **Poisson-Gleichung** $\Delta u = f$ kann man ähnlich behandeln, wenn man $f(x, y)$ ebenfalls als Fourier-Reihe in x entwickelt.
- Bei vertauschten Rollen von x und y kann man analog vorgehen.
- Anders als mit dem einfachen Produktansatz kann man mit dem Fourier-Reihen-Ansatz **teils allgemeine Randdaten erreichen** (jedenfalls auf zwei Seiten eines Rechtecks bei Nulldaten auf den anderen).

Polarkoordinaten-Produktansatz bei $\Delta u \equiv 0$

Die Darstellung des 2d-Laplace-Operators in ebenen Polarkoordinaten ist

$$\Delta u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \right] u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

für $r > 0$ und $\vartheta \in \mathbb{R}$ (Formel „von rechts nach links“ leicht nachzurechnen).

Der Polarkoordinaten-Produktansatz

$$u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = \eta(r) \kappa(\vartheta) \quad \text{mit Faktoren } \eta \in C^2((0, \infty)), \kappa \in C^2(\mathbb{R})$$

für Lösungen u der Laplace-Gleichung $\Delta u \equiv 0$ auf \mathbb{R}^2 führt daher auf

$$\eta''(r) \kappa(\vartheta) + \frac{1}{r} \eta'(r) \kappa(\vartheta) + \frac{1}{r^2} \eta(r) \kappa''(\vartheta) = 0.$$

Auflösen zu $\frac{r^2 \eta''(r)}{\eta(r)} + \frac{r \eta'(r)}{\eta(r)} = -\frac{\kappa''(\vartheta)}{\kappa(\vartheta)}$ ergibt die GDG (mit Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$r^2 \eta''(r) + r \eta'(r) = \lambda \eta(r) \quad \text{und} \quad \kappa''(\vartheta) = -\lambda \kappa(\vartheta).$$

Polarkoordinaten-Produktansatz bei $\Delta u \equiv 0$ (Fortsetzung)

Die (relevanten) Lösungen der zwei GDG kann man vollständig bestimmen:

- GDG $\kappa'' = -\lambda \kappa$: Polarkoordinaten-Struktur \rightsquigarrow nur 2π -periodische Lösungen κ relevant. Solche gibt es nur für $\lambda = \omega^2$ in diesen Fällen:
 - Fall $\omega = 0$: κ konstant,
 - Fall $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $\kappa(\vartheta) = B_1 \cos(\omega\vartheta) + B_2 \sin(\omega\vartheta)$.
- GDG $r^2 \eta''(r) + r \eta'(r) = \omega^2 \eta(r)$: Ist Eulersch, entspricht nach DGL I $\tilde{\eta}''(s) = \omega^2 \tilde{\eta}(s)$ durch Trafos $\tilde{\eta}(s) = \eta(e^s)$ und $\eta(r) = \tilde{\eta}(\log r)$. Daher:
 - Fall $\omega = 0$: $\tilde{\eta}(s) = A_1 s + A_2 \rightsquigarrow \eta(r) = A_1 \log r + A_2$
 - Fall $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $\tilde{\eta}(s) = A_1 e^{\omega s} + A_2 e^{-\omega s} \rightsquigarrow \eta(r) = A_1 r^\omega + A_2 r^{-\omega}$.
- Insgesamt ist $u(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) = \eta(r) \kappa(\vartheta)$ **Linearkombination von**:
 - Fall $\omega = 0$: $\log r$ (**Fundamentallösung** in Polarkoord.) und 1 (konstant),
 - Fall $\omega \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $r^\omega \cos(\omega\vartheta)$, $r^\omega \sin(\omega\vartheta)$ (**harmon. Polynome** in Polarkoord.) und $r^{-\omega} \cos(\omega\vartheta)$, $r^{-\omega} \sin(\omega\vartheta)$ (**neue Lösungstypen mit Singularität**; entsprechen partiellen Ableitungen der Fundamentallösung).

3.2 Die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung

Die **homogene bzw. inhomogene Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung (WLG)** für eine skalare Funktion u von Zeit-Raum-Variablen (t, x) lautet

$$u_t - \Delta u \equiv 0 \quad \text{auf } \Omega_T \quad \text{bzw.} \quad u_t - \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega_T$$

mit offenem Raumbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und Zeithorizont $T \in (0, \infty]$ und mit Abkürzungen $S_T := (0, T) \times S$ und $\Delta := \Delta_x$.

Grundbemerkungen zur Wärmeleitungsgleichung:

- Beim typischen **Cauchy-Dirichlet-Problem** wird die WLG durch eine AB $u(0, \cdot) = u_0$ auf Ω und eine Dirichlet-RB $u = g$ auf $(\partial\Omega)_T$ ergänzt.
- Die WLG ist **linear**. Ihre Theorie ähnelt oft der der Laplace-/Poisson-Gleichung (mit abgewandelten Effekten bezüglich der t -Variablen).
- Die **Raumdimension** $n \in \mathbb{N}$ ist, so nicht anderes gesagt, beliebig. Teils beschränken wir uns im Folgenden aber auf den 1d-Fall $n=1$.

Beispiellösungen der 1d-WLG und parabolische Skalierung

Beispiellösungen u der homogenen 1d-WLG ($n=1$) auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind:

- Lösungen in Produkt(ansatz)-Form $u(t, x) = \varphi(t) \psi(x)$,
 z.B. $u(t, x) = e^{t \pm x}$ bzw. $u(t, x) = e^t \cosh x$, $u(t, x) = e^t \sinh x$,
 z.B. $u(t, x) = e^{-t} \cos x$, $u(t, x) = e^{-t} \sin x$,
- polynomiale Lösungen,
 z.B. $u(t, x) = 2t + x^2$, $u(t, x) = 6tx + x^3$, $u(t, x) = 12t^2 + 12tx^2 + x^4$.

Die Beispiele polynomialer Lösungen sind homogen in (t, x^2) . Solche Analogien zwischen t und x^2 sind bei der WLG typisch und manifestieren sich auch bei der **parabolischen Skalierung der WLG** (für beliebiges n):

u löst die homogene WLG, $\lambda > 0$

$\implies \tilde{u}(t, x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$ löst die homogene WLG.

Nachrechnen: $\left(\frac{d}{dt} - \Delta_x\right) \tilde{u}(t, x) = \lambda^2 u_t(\lambda^2 t, \lambda x) - \lambda^2 \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x) = 0$. □

Die Fundamentallösung der WLG

Die Fundamentallösung Φ der WLG ist gegeben durch

$$\Phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad \text{für } (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$$

und hat folgende Eigenschaften:

- Φ ist positiv und löst die homogene WLG auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) dx = 1$ für alle $t > 0$ (Normierung),
- $\Phi(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^{-n} \Phi(t, x)$ für alle $t, \lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ (Skalierung),
- $\Phi(t, x)$ ist rotationssymmetrisch in x ,
- $\lim_{t \searrow 0} \Phi(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$ für $x \in \mathbb{R}^n$ („Anfangsbedingung“).

Man kann die Form von Φ z.B. aus den ersten vier Eigenschaften herleiten. Physikalisch beschreibt Φ die Wärme-/Diffusionsausbreitung einer zur Zeit $t = 0$ im Punkt $x = 0$ konzentrierten Einheits-Wärmemenge bzw. -Masse.

Lösungsformel für das Cauchy-Problem zur WLG

Im Ganzraum-Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ betrachtet man das Cauchy-Problem aus WLG und AB (RB fällt weg) und erhält Lösungen aus folgender Integralformel:

Satz (Lösung des WLG-Cauchy-Problems durch partielle Faltung mit Φ)

Ist $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, so definiert

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy$$

eine beschränkte **Lösung** $u \in C^2((0, T) \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ des **Cauchy-Problems zur homogenen WLG**

$$u_t - \Delta u \equiv 0 \quad \text{auf } (0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad u(0, \cdot) = u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n.$$

Der Satz hat Gemeinsamkeiten mit der Lösung der Poisson-Gleichung durch Faltung, aber mehr noch mit der PIF. Tatsächlich verhält sich Φ analog zu den im PIF-Beweis verwendeten Eigenschaften des Poisson-Kerns K_P , und man kann den aktuellen Satz weitgehend analog zeigen. \square

Erhaltungsprinzip für die Gesamt-Wärme bzw. -Masse

Korollar (Erhaltungsprinzip für die Gesamt-Wärme bzw. -Masse)

Ist $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ beschränkt mit $\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)| dx < \infty$, so gilt für die Lösung u des Satzes

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx \quad \text{für alle } t > 0.$$

Physikalisch bedeutet dies: Die Gesamt-Wärmemenge bzw. Gesamt-Masse zur Anfangszeit $t = 0$ bleibt (wenn endlich) für alle Zeiten $t > 0$ erhalten.

Beweis des Korollars: Mit der Formel des Satzes rechne

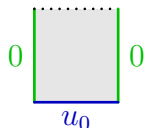
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) u_0(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) dx}_{=1} u_0(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) dy. \quad \square \end{aligned}$$

Fourier-(Sinus-)Reihen-Ansatz bei der 1d-WLG $u_t - u_{xx} \equiv 0$

Beim **Cauchy-Dirichlet-Problem** für die 1d-WLG auf $(0, \pi)$

$$u_t - u_{xx} \equiv 0 \text{ auf } (0, T) \times (0, \pi),$$

$$u(0, \cdot) = u_0, \quad u(\cdot, 0) \equiv 0, \quad u(\cdot, \pi) \equiv 0$$



kann man wie früher für die Laplace-Gleichung einen **Fourier-(Sinus-)Reihen-Ansatz** mit t -abhängigen Koeffizienten $a_k \in C^1((0, T))$ machen:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(kx)$$

Einsetzen in die WLG führt letztlich auf die GDG $a'_k(t) = -k^2 a_k(t)$ mit allgemeiner Lösung $a_k(t) = c_k \exp(-k^2 t)$. Dies ergibt die Lösungsformel

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(-k^2 t) \sin(kx),$$

wobei Einsetzen von $t = 0$ zeigt, dass $c_k \in \mathbb{R}$ die Fourier-Koeffizienten des ungerade und 2π -periodisch fortgesetzten Anfangsdatums $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ sind.

Beispiel zum Fourier-Reihen-Ansatz bei der 1d-WLG

Als **Beispiel** betrachte das **Cauchy-Dirichlet-Problem zur WLG** (mit $T = \infty$)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &\equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times (0, \pi), \\ u(0, x) &= x(\pi - x) \quad \text{für } 0 < x < \pi, \\ u(t, 0) &= 0, \quad u(t, \pi) = 0 \quad \text{für } 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten von $u_0(x) = x(\pi - |x|)$ sind

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(kx) \, dx = \dots = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi k^3}, & k \text{ ungerade} \end{cases},$$

wobei die eigentliche Berechnung auf Folie 86 bereits durchgeführt wurde. Einsetzen in die Lösungsformel für die hier betrachtete Situation ergibt

$$u(t, x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{8}{\pi k^3} \exp(-k^2 t) \sin(kx).$$

Bemerkungen zum Fourier-Reihen-Ansatz bei der 1d-WLG

Bemerkungen zum Fourier-Reihen-Ansatz bei der WLG:

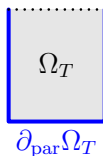
- Von (x_1, x_2) mit $x_1 < x_2$ kann man auf $(0, \pi)$ transformieren.
(Verschieben und parabolisch mit Faktor $\lambda = \frac{\pi}{x_2 - x_1}$ skalieren!)
- Die **inhomogene 1d-WLG** $u_t - u_{xx} = f$ kann man ähnlich behandeln, wenn man $f(t, x)$ ebenfalls als Fourier-Reihe in x entwickelt.
- Anders als mit einem einfachem Produktansatz kann man mit dem Fourier-Reihen-Ansatz **allgemeine Anfangsdaten behandeln** (jedenfalls bei Null-Dirichlet-Randdaten und auch in einigen anderen Fällen).

Das Maximumprinzip für die WLG

Wie bei der Laplace-Gleichung gilt auch bei der homogenen WLG ein Maximumprinzip, das aber nur den **parabolischen Rand**

$$\partial_{\text{par}}\Omega_T := (\{0\} \times \bar{\Omega}) \cup (\partial\Omega)_T$$

des Zeit-Raum-Zylinders $\Omega_T = (0, T) \times \Omega$ einbezieht:



Satz (Maximumprinzip für Lösungen der homogenen WLG)

Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0([0, T] \times \bar{\Omega})$ eine **Lösung der homogenen WLG** auf Ω_T mit beschränktem, offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T \in (0, \infty]$.

(1) **Schwaches Maximumprinzip:** Es gilt

$$\inf_{\partial_{\text{par}}\Omega_T} u \leq u(t, x) \leq \sup_{\partial_{\text{par}}\Omega_T} u \quad \text{für alle } (t, x) \in \Omega_T.$$

(2) **Starkes Maximumprinzip:** Ist Ω zusammenhängend und u nicht konstant auf Ω_t mit $t \in (0, T)$, so gilt sogar

$$\inf_{\partial_{\text{par}}\Omega_t} u < u(t, x) < \sup_{\partial_{\text{par}}\Omega_t} u \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Folgerungen aus dem Maximumprinzip für die WLG

Korollar 1: Für eine Lösung u der homogenen WLG wie im Satz gilt auch

$$|u(t, x)| \leq \sup_{\partial_{\text{par}} \Omega_T} |u| \quad \text{für alle } (t, x) \in \Omega_T.$$

Korollar 2 (Eindeutigkeitsatz für Cauchy-Dirichlet-Problem zur WLG)

Für beschränktes, offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $T \in (0, \infty]$, $f \in C^0(\Omega_T)$, $u_0 \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0((\partial\Omega)_T)$ hat das **Cauchy-Dirichlet-Problem zur WLG**

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \text{ auf } \Omega_T, \\ u(0, \cdot) &= u_0 \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } (\partial\Omega)_T \end{aligned}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0([0, T] \times \bar{\Omega})$.

Die Beweise der Korollare laufen wie bei der Laplace-/Poisson-Gleichung. \square
Auch stetige Abhängigkeit von Randdaten (damals Korollar 3) folgt analog.

Beweis des schwachen Maximumprinzips für die WLG

In starker Anlehnung an den Fall der Laplace-Gleichung erfolgt:

Beweis des schwachen Maximumprinzips: Es reicht, die Behauptung auf Ω_Θ mit $0 < \Theta < T$ zu zeigen. Für $u_\varepsilon(t, x) := u(t, x) - \varepsilon t$ mit $\varepsilon > 0$ bemerke

$$(u_\varepsilon)_t(t, x) - \Delta u_\varepsilon(t, x) < 0 \quad \text{für alle } (t, x) \in (0, \Theta] \times \Omega.$$

Da eine Maximalstelle (t, x) von u_ε in $(0, \Theta] \times \Omega$ sowohl $(u_\varepsilon)_t(t, x) \geq 0$ als auch $\Delta u_\varepsilon(t, x) \leq 0$ erfüllen muss, hat u_ε keine Maximalstelle in $(0, \Theta] \times \Omega$.

Es folgen $\max_{[0, \Theta] \times \bar{\Omega}} u_\varepsilon = \sup_{\partial_{\text{par}} \Omega_\Theta} u_\varepsilon$ und

$$u(t, x) - \varepsilon \Theta < u_\varepsilon(t, x) < \sup_{\partial_{\text{par}} \Omega_\Theta} u_\varepsilon \leq \sup_{\partial_{\text{par}} \Omega_\Theta} u \quad \text{für } (t, x) \in \Omega_\Theta.$$

Im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalte wie benötigt $u(t, x) \leq \sup_{\partial_{\text{par}} \Omega_\Theta} u$. Die umgekehrte Ungleichung $u(t, x) \geq \inf_{\partial_{\text{par}} \Omega_\Theta} u$ zeige analog. □

Der Beweis des *starken* Maximumprinzips erfordert eine an die WLG angepasste Mittelwerteigenschaft und wird hier nicht behandelt.

3.3 Die Wellengleichung

Die **homogene bzw. inhomogene Wellengleichung (WG)** für eine skalare Funktion u von Zeit-Raum-Variablen (t, x) lautet

$$u_{tt} - \Delta u \equiv 0 \quad \text{auf } \Omega_T \quad \text{bzw.} \quad u_{tt} - \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega_T$$

mit offenem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $T \in (0, \infty]$ (bei sonstigen Bezeichnungen wie zuvor).

Grundbemerkungen zur Wellengleichung:

- Beim typischen **Cauchy-Dirichlet-Problem** wird die WG durch zwei ABen $u(0, \cdot) = u_0$ und $u_t(0, \cdot) = v_0$ auf Ω sowie eine Dirichlet-RB $u = g$ auf $(\partial\Omega)_T$ ergänzt.
- Auch die WG ist **linear**. Ihre Theorie gestaltet sich aber ganz anders als die der Laplace-/Poisson-Gleichung und der WLG.
- Zumeist arbeiten wir in **Raumdimension** $n = 1$ und kommen nur kurz zu $n \in \{2, 3\}$. In Theorie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ steigen wir hier nicht ein.

Beispiellösungen der 1d-Wellengleichung

Beispiellösungen u der homogenen 1d-WG ($n=1$) auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind:

- Lösungen in Produkt(ansatz)-Form $u(t, x) = \varphi(t) \psi(x)$,
z.B. $e^{\pm t} e^{\pm x}$ (alle 4 VZ-Kombinationen; alternativ Darstellung mit \cosh , \sinh)
z.B. $\cos t \cos x$, $\cos t \sin x$, $\sin t \cos x$, $\sin t \sin x$
- polynomiale Lösungen,
z.B. $u(t, x) = t^2 + x^2$, $u(t, x) = t^3 + 3tx^2$, $u(t, x) = t^4 + 6t^2x^2 + x^4$.

Zwecks Vergleich mit der folgenden Theorie sei festgehalten, dass alle Beispiellösungen als **Funktionen von $x+t$ und $x-t$** geschrieben werden können, z.B.

$$\begin{aligned}
 e^t e^{-x} &= e^{-(x-t)}, & \cos t \cos x &= \frac{1}{2} \cos(x+t) + \frac{1}{2} \cos(x-t), \\
 \sin t \sin x &= -\frac{1}{2} \sin(x+t) + \frac{1}{2} \sin(x-t), & t^2 + x^2 &= \frac{1}{2}(x+t)^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2.
 \end{aligned}$$

Lösung der 1d-Wellengleichung durch Variablentrafo

Die **homogene 1d-WG** $u_{tt} - u_{xx} \equiv 0$ auf $(t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$ lässt sich **durch Variablentrafo** $r = \frac{x+t}{2}$, $s = \frac{x-t}{2}$ bzw. äquivalent $x = r+s$, $t = r-s$ **lösen**:

Ist u Lösung, so folgt für $w(r, s) := u(r-s, r+s)$ die einfache PDG $w_{sr} \equiv 0$, und man kann durch zwei Stammfunktionsbildungen lösen. Als **allgemeine Lösung** ergibt sich $w(r, s) = h(2r) + k(2s)$ und für die WG dann

$$\boxed{u(t, x) = h(x+t) + k(x-t)} \quad \text{mit beliebigen Funktionen } h, k \in C^2(\mathbb{R}).$$

Interpretation: $h(x+t)$ nach links laufendes Wellenpaket (Geschwindgkt. -1),
 $k(x-t)$ nach rechts laufendes Wellenpaket (Geschwindgkt. 1).

Nachrechnen der PDG $w_{sr} \equiv 0$ für w : Aus $w(r, s) := u(r-s, r+s)$ bekomme mit Kettenregel erst $w_s(r, s) = -u_t(r-s, r+s) + u_x(r-s, r+s)$ und dann

$$\begin{aligned} w_{sr}(r, s) &= -u_{tt}(r-s, r+s) - u_{tx}(r-s, r+s) + u_{xt}(r-s, r+s) + u_{xx}(r-s, r+s) \\ &= -u_{tt}(r-s, r+s) + u_{xx}(r-s, r+s) \stackrel{\text{WG}}{=} 0. \end{aligned}$$

Cauchy-Problem zur 1d-WG, d'Alembert-Formel

Die vorausgehende Lösungsformel lässt sich an das Cauchy-Problem zur 1d-WG mit den beiden ABen für $u(0, \cdot)$ und $u_t(0, \cdot)$ anpassen:

Satz (d'Alembertsche Lösungsformel für das Cauchy-Problem zur 1d-WG)

Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Die **eindeutige Lösung** $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ des **Cauchy-Problems zur homogenen 1d-Wellengleichung**

$$u_{tt} - u_{xx} \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \text{ auf } \mathbb{R}, \quad u_t(0, \cdot) = v_0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

ist gegeben durch die **d'Alembertsche Lösungsformel**

$$u(t, x) := \frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy \quad \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- **Interpretation:** Wellenausbreitung (wie zuvor) bei Initialauslenkung u_0 und Initialgeschwindigkeit v_0 zur Zeit $t = 0$.
- Die WG $u_{tt} - c^2 u_{xx} \equiv 0$ mit **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $c > 0$ löst man analog durch $u(t, x) := \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2}u_0(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy$.

Herleitung der d'Alembert-Formel

Beweis/Herleitung der d'Alembertschen Lösungsformel:

Ausgehend von der Lösungsformel $u(t, x) = h(x+t) + k(x-t)$ rechne so:

$$\begin{array}{lll}
 \text{ABen} & h + k = u_0 & \text{Ableiten} & h' + k' = u'_0 & \text{Auflösen} & h' = \frac{1}{2}u'_0 + \frac{1}{2}v_0 \\
 \rightsquigarrow & h' - k' = v_0 & \rightsquigarrow & h' - k' = v_0 & \rightsquigarrow & k' = \frac{1}{2}u'_0 - \frac{1}{2}v_0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Aufleiten} \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 h(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^x v_0(y) dy + C \\
 k(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x v_0(y) dy - C
 \end{array}
 \quad (\text{gleiches } C \text{ wegen } h+k = u_0)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Einsetzen} \\
 \rightsquigarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u(t, x) = h(x+t) + k(x-t) \\
 = \frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy
 \end{array}$$

Somit erhalte die d'Alembert-Formel. □

Cauchy-Dirichlet-Problem zur 1d-WG auf der Halbgeraden

Weitgehend analog zur d'Alembert-Formel lässt sich das folgende **Cauchy-Dirichlet-Problem zur homogenen 1d-Wellengleichung auf $(0, \infty)$** lösen:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &\equiv 0 \text{ auf } (0, \infty) \times (0, \infty), \\ u(0, \cdot) &= u_0 \text{ auf } (0, \infty), \quad u_t(0, \cdot) = v_0 \text{ auf } (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= g \text{ auf } (0, \infty). \end{aligned}$$

Für $u_0, g \in C^2([0, \infty))$, $v_0 \in C^1([0, \infty))$ mit $g(0) = u_0(0)$, $g'(0) = v_0(0)$, $g''(0) = u_0''(0)$ (Kompatibilität der Daten bei $(t, x) = (0, 0)$) erhalte Lösung als

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) \, dy & \text{für } x \geq t \\ \frac{1}{2}u_0(t+x) - \frac{1}{2}u_0(t-x) + g(t-x) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} v_0(y) \, dy & \text{für } x \leq t \end{cases}.$$

Speziell für $g \equiv 0$ modelliert diese Formel die **ungerade Reflexion von Wellenpaketen** auf einer/m bei $x = 0$ fest eingespannten Saite/Seil.

Für beschränkte Intervalle Ω ergeben sich prinzipiell ähnliche Formeln mit eventuell sehr vielen Fallunterscheidungen (da mehrfache Reflexion möglich).

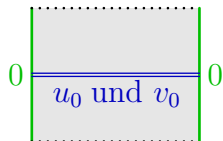
Fourier-(Sinus-)Reihen-Ansatz bei der 1d-WG $u_{tt} - u_{xx} \equiv 0$

Das **Cauchy-Dirichlet-Problem** für die 1d-WG auf $(0, \pi)$

$$u_{tt} - u_{xx} \equiv 0 \text{ auf } (-T, T) \times (0, \pi),$$

$$u(0, \cdot) = u_0, \quad u_t(0, \cdot) = v_0,$$

$$u(\cdot, 0) \equiv 0, \quad u(\cdot, \pi) \equiv 0$$



kann grundsätzlich mit der vorigen Methode angegangen werden. Günstiger ist aber oft der **Fourier-(Sinus-)Reihen-Ansatz** mit $a_k \in C^2((-T, T))$:

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(kx).$$

Einsetzen in die WG führt auf die GDG $a_k''(t) = -k^2 a_k(t)$ mit allgemeiner Lösung $a_k(t) = c_k \cos(kt) + \tilde{c}_k \sin(kt)$. Dies ergibt die Lösungsformel

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [c_k \cos(kt) + \tilde{c}_k \sin(kt)] \sin(kx),$$

wobei c_k und $k\tilde{c}_k$ die Fourier-Koeffizienten der ungerade und 2π -periodisch fortgesetzten Anfangsdaten $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ sind.

Cauchy-Problem zur 3d- und 2d-Wellengleichung

Satz (Lösungsformeln für das Cauchy-Problem zur 3d- und 2d-WG)

Seien $u_0 \in C^3(\mathbb{R})$ und $v_0 \in C^2(\mathbb{R})$. Die **eindeutige Lösung** $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ des **Cauchy-Problems zur homogenen Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

$$u(0, \cdot) = u_0 \text{ auf } \mathbb{R}^n, \quad u_t(0, \cdot) = v_0 \text{ auf } \mathbb{R}^n$$

ist für $n \in \{2, 3\}$ wie folgt gegeben:

- **Fall $n = 3$: Kirchhoffsche Lösungsformel** für $(t, x) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$:

$$u(t, x) := \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_{|t|}(x)} [u_0(y) + (y-x) \cdot \nabla u_0(y) + t v_0(y)] dS(y),$$

- **Fall $n = 2$: Poissonsche Lösungsformel** für $(t, x) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$:

$$u(t, x) := \frac{1}{2\pi |t|} \int_{B_{|t|}(x)} \frac{u_0(y) + (y-x) \cdot \nabla u_0(y) + t v_0(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

Die Kirchhoff-Formel enthält ein Oberflächenintegral über die Kugeloberfläche $\partial B_{|t|}(x)$, die Poisson-Formel ein Bereichsintegral über die Kreisscheibe $B_{|t|}(x)$.

Zur Lösungseigenschaft der Kirchhoff-Lösung

Teilnachweis: Für $n = 3$ zerlege Integral als $u(t, x) = u_{u_0}(t, x) + u_{v_0}(t, x)$ mit

$$u_{v_0}(t, x) := \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial B_{|t|}(x)} t v_0(y) \, dS(y) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1} v_0(x + t\nu) \, dS(\nu).$$

Für $t > 0$ prüfe dann Lösungseigenschaft von u_{v_0} (mit $(tf(t))_{tt} = (2+t\frac{d}{dt})f'(t)$):

$$\begin{aligned} (u_{v_0})_{tt}(t, x) &= \frac{1}{4\pi} \left(2+t\frac{d}{dt}\right) \int_{\partial B_1} \nu \cdot \nabla v_0(x+t\nu) \, dS(\nu) \\ &= \frac{1}{4\pi} \underbrace{\left(2+t\frac{d}{dt}\right) \frac{1}{t^2}}_{\frac{2}{t^2} - \frac{2t}{t^3} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt}} \int_{\partial B_t(x)} \frac{y-x}{t} \cdot \nabla v_0(y) \, dS(y) \\ &= \frac{2}{t^2} - \frac{2t}{t^3} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} = \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \\ &= \frac{1}{4\pi t} \frac{d}{dt} \int_{B_t(x)} \Delta v_0(y) \, dy = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B_t(x)} \Delta v_0(y) \, dS(y) \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1} \Delta v_0(x+t\nu) \, dS(\nu) = \Delta_x [u_{v_0}(t, x)]. \end{aligned}$$

Lösungseigenschaften für $t < 0$ und für u_{u_0} erhalte ähnlich. Der Beweis, dass die Kirchhoff-Formel alle Lösungen gibt, ist aufwändiger. Die Poisson-Formel für den Fall $n = 2$ ergibt sich mit der Hadamardschen (Dimensions-)Abstiegsmethode. \square

Schlussbemerkung zur Wellengleichung

Schlussbemerkung zur Wellengleichung:

- Beim Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung und beim Cauchy-Problem zur WLK beziehen Lösungsformeln *immer* das Rand- bzw. Anfangsdatum *auf seinem ganzen Definitionsbereich* ein. Im Kontrast dazu **benötigt bei der Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u \equiv 0$ die Berechnung von $u(t, x) \dots$**
 - für $n = 1$ (d'Alembert) nur u_0 auf $\{x-t, x+t\}$ und v_0 auf $(x-|t|, x+|t|)$,
 - für $n = 3$ (Kirchhoff) nur u_0 und v_0 auf $\partial B_{|t|}(x)$,
 - für $n = 2$ (Poisson) nur u_0 und v_0 auf $B_{|t|}(x)$.

Es manifestiert sich ein Hauptpunkt der Theorie: Die **Wellengleichung** modelliert Wellenausbreitung mit (betragsmäßiger) **Ausbreitungsgeschwindigkeit 1** (sowie in Form $u_{tt} - c^2 \Delta u \equiv 0$ mit beliebiger Ausbreitungsgeschwindigkeit $c > 0$). Dies steht im Kontrast zu *unendlicher* Ausbreitungsgeschwindigkeit bei der zuvor betrachteten WLK.

Literatur/Quellen

Vorlesungsmaterial:

- Vorlesungsfolien von H.J. OBERLE und J. STRUCKMEIER.
- Eigenes Skript „Partial Differential Equations I“.

Bücher:

- K. BURG, H. HAF, F. WILLE, A. MEISTER, *Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen* (4. Aufl.), Vieweg+Teubner, 2009.
- L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.
- N. HUNGERBÜHLER, *Einführung in Partielle Differentialgleichungen* (3. Aufl.), vdf Verlag, 2022.
- P. MEINHOLD, E. WAGNER, *Partielle Differentialgleichungen* (6. Aufl.), Teubner, 1990.