Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= \frac{1}{2}x\cos(t) && \text{für } x \in (0,2), t > 0, \\ u(x,0) &= 20\sin(2\pi x) + 24\sin(4\pi x) + \frac{x}{2} && \text{für } x \in [0,2], \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) &= 1 + \sin(t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 2v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,2), t > 0, \\ v(x,0) &= 20\sin(2\pi x) + 24\sin(4\pi x) && \text{für } x \in [0,2], \\ v(0,t) = 0, \quad v(2,t) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - 0 - \frac{x}{2}(1 + \sin(t) - 0) = u(x,t) - \frac{x}{2}(1 + \sin(t))$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{2}(1 + \sin(t))\,.$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + \frac{x}{2}\cos(t), \qquad v_{xx} = u_{xx}\,.$$

Neue DGL: $\qquad v_t + \dfrac{x}{2}\cos(t) - 2v_{xx} = \tfrac{1}{2}x\cos(t) \iff$

$$\boxed{v_t - 2v_{xx} = 0}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - \frac{x}{2}(1 + \sin(0)) \\ &= 20\sin(2\pi x) + 24\sin(4\pi x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \iff \end{aligned}$$

$$\boxed{v(x,0) = 20\sin(2\pi x) + 24\sin(4\pi x)}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(2,t) = 0}$

b) Mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ und $c = 2$ gilt:

$$v(x,t) \; = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \, \sin(k\omega x) \; = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{2} t} \, \sin(\frac{k\pi}{2} x)$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$v(x,0) \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{k\pi}{2} x) \; \overset{!}{=} \; 20\sin(2\pi x) \; + \; 24\sin(4\pi x)$

$\implies a_4 = 20,\; a_8 = 24,\; a_k = 0 \qquad \forall k \notin \{4, 8\}.$

c) Für die Lösung von a) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \; v(x,t) + \frac{x}{2}(1 + \sin(t)) \\ &= \; 20\, e^{-\frac{4^2\pi^2}{2} t} \, \sin(\frac{4\pi}{2} x) + 24\, e^{-\frac{8^2\pi^2}{2} t} \, \sin(\frac{8\pi}{2} x) + \frac{x}{2}(1 + \sin(t)) \\ &= \; 20\, e^{-8\pi^2 t} \, \sin(2\pi x) + 24\, e^{-32\pi^2 t} \, \sin(4\pi x) + \frac{x}{2}(1 + \sin(t)). \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0 && x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ t > 0,\\
u(x,0) &= \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{4}],\\ \frac{\pi}{2} - x & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}],\end{cases}\\
u_t(x,0) &= 2\sin(4x) && x \in [0, \frac{\pi}{2}],\\
u(0,t) &= u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}
$$

b) Gegeben ist die Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\, 3),\ t > 0,\\
u(x,0) &= 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
u_t(x,0) &= \frac{x}{3} && x \in [0,3], \qquad (1)\\
u(0,t) &= e^{-t} && t > 0,\\
u(3,t) &= 1 && t > 0.
\end{aligned}
$$

für $u = u(x,t)$. Welche Anfangsrandwertaufgabe erhält man nach geeigneter Homogenisierung der Randdaten?

Lösung 2:

a) Hier gilt mit $L = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{\pi/2} = 2$, $c = 1$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right] \sin(k\omega x)$,

wobei A_k und $\dfrac{ck\pi}{L} B_k$ die Fourierkoeffizienten der Funktionen $u(x,0)$ bzw. $u_t(x,0) = 2\sin(4x)$ bei Entwicklung nach den Funktionen $\sin(2kx)$ sind.

Die zweite Anfangsbedingung liefert mit $\omega = 2$ und $c = 1$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega)\sin(k\omega x) = 2\sin(4x).$$

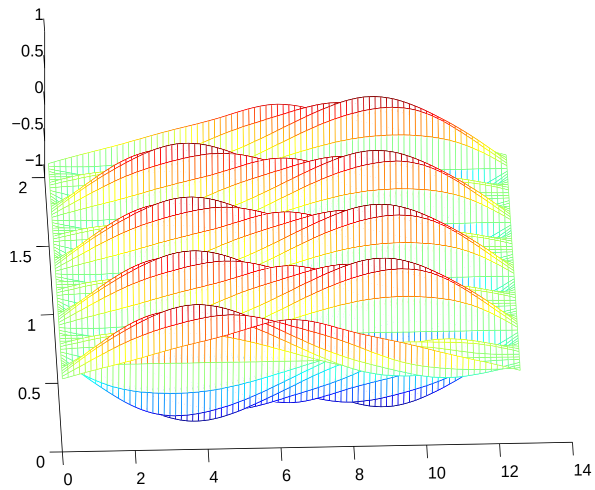
Man liest unmittelbar ab:

$B_2 = \dfrac{2}{4}$ und $B_k = 0$ sonst.

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\cdot \sin(2kx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2kx)dx + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x)\sin(2kx)dx\\
&= -\frac{4}{2k\pi}\Big[x\cos(2kx)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2kx)dx - \frac{2}{2k}\Big[\cos(2kx)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&+ \frac{4}{2k\pi}\Big[x\cos(2kx)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2k\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kx)dx = \frac{2}{k^2\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(ck\omega t) \sin(k\omega x)\right] + B_2 \sin(2c\omega t) \sin(2c\omega x) \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(ck\omega t) \sin(k\omega x)\right] + \frac{1}{2} \sin(4t) \sin(4x) \\ &= \frac{1}{2} \sin(4t) \sin(4x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos(2kt) \sin(2kx) \cdot \end{aligned}$$



b)

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,3),\ t > 0, \\ u(x,0) &= 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3], \\ u_t(x,0) &= \frac{x}{3} && x \in (0,3), \qquad (1) \\ u(0,t) &= e^{-t} && t \geq 0, \\ u(3,t) &= 1 && t \geq 0. \end{aligned}$$

Homogenisierung der Randdaten gemäß $v = u - e^{-t} - \frac{x}{3}(1 - e^{-t})$ liefert

$u_t = v_t - e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad u_{tt} = v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}), \quad v_{xx} = u_{xx}.$

Neue DGL:

$v_{tt} + e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) - 4v_{xx} = e^{-t}(1 - \frac{x}{3}) \iff v_{tt} - 4v_{xx} = 0\,.$

Neue Anfangs- und Randwerte:

$v(x,0) = u(x,0) - e^0 - \frac{x}{3}(1 - e^0) = 1 + 2\sin(\pi x) - 1 = 2\sin(\pi x),$

$v_t(x,0) = u_t(x,0) + e^0 - \frac{x}{3} \cdot e^0 = 1,$

$v(0,t) = v(3,t) = 0\,.$

Bearbeitung: 01.07.- 05.07.2024