Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 4u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Tipp für die Integration: $\sin(\alpha x)\sin(\gamma x) = \cos(\alpha x - \gamma x) - \cos(\alpha x + \gamma x)$.

b) Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} &u_t - 2u_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x), && x \in (0,\,2),\ t > 0, \\ &u(x,0) = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x), && x \in [0,2], \\ &u(0,t) = 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randwerte auf folgendes Problem für eine geeignet definierte Funktion v führt:

$$\begin{aligned} &v_t - 2v_{xx} = \sin(2\pi x), && x \in (0,\,2),\ t > 0, \\ &v(x,0) = 3\sin(3\pi x), && x \in [0,2], \\ &v(0,t) = v(2,t) = 0, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil i).

Lösung:

a) Mit $c = 4$ und $\omega = \pi/1$ lautet die Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-4k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x).$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) = x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten der Summanden der rechten Seite:

$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_0^1 x\sin(k\pi x)dx \\ &= 2\cdot x\,\frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}dx = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

$$\beta_k = 2\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx = \int_0^1 \cos\left(k\pi x-\frac{\pi}{2}x\right)-\cos\left(k\pi x+\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$= \left[\frac{\sin\left((k\pi-\frac{\pi}{2})x\right)}{k\pi-\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\left((k\pi+\frac{\pi}{2})x\right)}{k\pi+\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 = \frac{-(-1)^k}{k\pi-\frac{\pi}{2}} - \frac{(-1)^k}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

$$= (-1)^{k+1}\cdot\frac{2k\pi}{k^2\pi^2-\frac{\pi^2}{4}} = 2\cdot(-1)^{k+1}\cdot\frac{4k\pi}{4k^2\pi^2-\pi^2}$$

Für die a_k gilt dann $a_k = b_k - \beta_k$ und damit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k\pi}-\frac{4k\pi}{4k^2\pi^2-\pi^2}\right)e^{-4k^2\pi^2 t}\,\sin(k\pi x)\,.$$

b)

$$\begin{aligned} &u_t - 2u_{xx} = -2xe^{-2t}+\sin(2\pi x)\,, && x\in(0,\,2),\ t>0\,, \\ &u(x,0) = 1+\frac{x}{2}+3\sin(3\pi x)\,, && x\in[0,2]\,, \\ &u(0,t) = 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}\,, && t\geq 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Homogenisierung der Randdaten:
$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{2}(2e^{-2t}-1) = u(x,t) - 1 - xe^{-2t} + \frac{x}{2}\,.$
oder
$u(x,t) = v(x,t) + 1 + xe^{-2t} - \frac{x}{2}\,.$
Dann gilt:
$u_t = v_t - 2xe^{-2t}, \quad v_{xx} = u_{xx}\,.$
Neue DGL:
$v_t - 2xe^{-2t} - 2v_{xx} = -2xe^{-2t}+\sin(2\pi x) \iff \boxed{v_t - 2v_{xx} = \sin(2\pi x)}$
Anfangswerte:
$u(x,0) = v(x,0)+1+xe^0-\frac{x}{2} = 1+\frac{x}{2}+3\sin(3\pi x) \iff \boxed{v(x,0) = 3\sin(3\pi x)}$
Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(2,t) = 0}$

(ii) Für v machen wir den Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(\frac{k\pi}{2}x)\,,$$

Die Anfangsbedingung verlangt

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(0)\sin(\frac{k\pi}{2}x) \stackrel{!}{=} 3\sin(3\pi x)$$

Also $v_6(0) = 3$, $v_k(0) = 0$, $\forall k \neq 6$.
Einsetzen des Ansatzes in die Dgl ergibt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\dot{v}_k(t) + 2\,\frac{k^2\pi^2}{4} v_k(t) \right] \sin(\frac{k\pi}{2}x) \;=\; \sin(\frac{4\pi}{2}x)$$

Damit erhalten wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{v}_4(t) + 8\pi^2 v_4(t) \;&=\; 1, \\ \dot{v}_k(t) + 2\,\frac{k^2\pi^2}{4} v_k(t) \;&=\; 0,\; k \neq 4. \end{aligned}$$

Für $k \notin \{4, 6\}$ liefert die homogene Differentialgleichung mit Anfangswert Null jeweils die Lösung $v_k(t) = 0$.

Für $k = 6$:
$\dot{v}_6(t) + 18\pi^2 v_6(t) \;=\; 0, \qquad v_6(0) = 3 \Longrightarrow v_6(t) = 3e^{-18\pi^2 t}.$

Für $k = 4$ erhalten wir für die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$v_{4,h}(t) = Ce^{-8\pi^2 t}$$

Der Ansatz $v_{4p}(t) = k$ liefert $\quad k = \dfrac{1}{8\pi^2}$.

$$\begin{aligned} v_4(t) &= Ce^{-8\pi^2 t} + \frac{1}{8\pi^2} \qquad \text{und } v_4(0) = 0 \text{ liefert } C = -\frac{1}{8\pi^2} \\ v_4(t) &= \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - e^{-8\pi^2 t}\right) \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_4(t)\sin(2\pi x) \;+\; v_6(t)\sin(3\pi x) \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\left(1 - e^{-8\pi^2 t}\right) \sin(2\pi x) + 3e^{-18\pi^2 t}\sin(3\pi x). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - 4u_{xx} = 3\sin(2\pi x)\cdot e^{-2t} && x\in(0,1),\ t>0\\
&u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x) && x\in[0,1],\\
&u_t(x,0) = v_0(x) = 0 && x\in[0,1],\\
&u(0,t) = 0 && t>0,\\
&u(1,t) = 0 && t>0,
\end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin(k\omega x), \qquad \omega = \frac{\pi}{1}$$

in die Differentialgleichung ein. Sie erhalten gewöhnliche Differentialgleichungen für die q_k. Die Anfangsbedingungen liefern die Anfangsdaten für die q_k.

Lösung:

Einsetzen des Ansatzes ergibt mit $\omega = \pi$ und $c = 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k''(t)\sin(k\omega x) + c^2(k\omega)^2 q_k(t)\sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} 3\sin(2\pi x)\cdot e^{-2t}$$

Wir erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$q_2''(t) + 2^2(2\pi)^2 q_2(t) = 3e^{-2t},$$
$$q_k''(t) + 2^2(k\pi)^2 q_k(t) = 0 \qquad \forall\, k \neq 2.$$

Wir setzen nun den Ansatz in die Anfangsbedingungen ein

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(0)\sin(k\pi x) \stackrel{!}{=} \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x)$$

Also lesen wir ab: $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 4$, $q_k(0) = 0$ sonst!

Die zweite Anfangsbedingung liefert zusammen mit dem Lösungsansatz

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k'(0)\sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} 0$$

die Werte $\quad q_k'(0) = 0\ \forall k\in\mathbb{N}$.

Für $k \notin \{1,2\}$ haben wir die Anfangswertaufgabe

$$q_k''(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) = 0, \qquad q_k(0) = 0,\ q_k'(0) = 0$$

mit der Lösung: $q_k(t) = 0$.

Für $k = 1$ haben wir mit $c = 2$ und $\omega = \pi$ die Anfangswertaufgabe:

$q_1''(t) + 4\pi^2 q_1(t) \;=\; 0\,, \qquad q_1(0) = 1,\; q_1'(0) = 0\,.$

Mit der allgemeinen Lösung: $\qquad q_1(t) = \; k_1 \cos(2\pi t) + \hat{k}_1 \sin(2\pi t)\,.$

Anpassen an Anfangswerte liefert: $q_1(t) = \; \cos(2\pi t)$

Für $k = 2$ haben wir die Anfangswertaufgabe:

$q_2''(t) + 16 \cdot \pi^2 q_2(t) \;=\; 3e^{-2t}\,, \qquad q_2(0) = 4\,,\; q_2'(0) = 0$

Zugehörige homogene Dgl: $q_{2,h}''(t) + 4^2 \cdot \pi^2 q_{2,h}(t) \;=\; 0$

mit der allgemeinen Lösung: $q_{2,h}(t) \;=\; k_2 \cos(4\pi t) + \hat{k}_2 \sin(4\pi t)$

Ansatz für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$q_{2,p}(t) \;=\; a\, e^{-2t}$

liefert

$$4a + 16 \cdot \pi^2 a \;=\; 3 \Longrightarrow a = \frac{3}{4 + 16\pi^2}$$

$$q_2(t) \;=\; k_2 \cos(4\pi t) + \hat{k}_2 \sin(4\pi t) \;+\; \frac{3}{4 + 16\pi^2}\, e^{-2t}$$

$$q_2(0) = k_2 \;+\; \frac{3}{4 + 16\pi^2} \;=\; 4 \Longleftrightarrow k_2 = \; 4 - \frac{3}{4 + 16\pi^2}$$

$$q_2'(0) = \hat{k}_2\, 4\pi \;-\; \frac{6}{4 + 16\pi^2} \;=\; 0 \Longleftrightarrow \hat{k}_2 = \frac{3}{2\pi(4 + 16\pi^2)}$$

$$q_2(t) \;=\; \frac{13 + 64\pi^2}{4 + 16\pi^2} \cos(4\pi t) + \frac{3}{2\pi(4 + 16\pi^2)} \sin(4\pi t) \;+\; \frac{3}{4 + 16\pi^2}\, e^{-2t}$$

Damit hat man insgesamt

$$\begin{aligned} u(x,t) = \; & \cos(2\pi t) \sin(1 \cdot \pi x) \\ & + \frac{1}{4 + 16\pi^2} \left((13 + 64\pi^2) \cos(4\pi t) + \frac{3}{2\pi} \sin(4\pi t) \;+\; 3\, e^{-2t} \right) \sin(2 \cdot \pi x)\,. \end{aligned}$$

Abgabe: 01.07.- 05.07.2024