Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Lösen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die folgende Dirichlet Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten auf der Kreisscheibe $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \qquad && 0 \leq r < 3 \\ u(3, \varphi) &= \cos^2(\varphi) \qquad && \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipps:

Verwenden Sie für die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung
$r^2 \cdot g''(r) + ar \cdot g'(r) + b \cdot g(r) = 0$ den Ansatz $g(r) = r^k$.
Es gilt: $\cos^2(\varphi) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))$.

Lösungsskizze:

Der Produktansatz : $u = v(r) \cdot w(\varphi)$ ergibt eingesetzt in die Laplacegleichung in Polarkoordinaten

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$

$$r^2 v'' w + r v' w + v w'' = 0 \implies \frac{r^2 v'' + r v'}{v} = -\frac{w''}{w} = \lambda$$

Die Lösungen von $w''/w = -\lambda$ hängen zwar von dem Vorzeichen von λ ab, hier kommen aber nur 2π periodische Lösungen in Frage:

$$w_k(\varphi) = c_1 \cos(k\varphi) + c_2 \sin(k\varphi), \qquad \lambda = k^2 \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Für v erhalten wir dann die (Eulersche) Differentialgleichung

$$r^2 v'' + r v' - k^2 v = 0$$

Für $k = 0$ erhält man die Lösung $v_0 = a_0 + b_0 \ln(r)$.

Für $k \neq 0$ liefert der Ansatz $v = r^m$ die beiden Lösungen $v_k = r^k$ und $\tilde{v}_k = r^{-k}$.

Da die Lösung in einem Kreis um Null definiert sein sollen, also insbesondere beschränkt bleiben sollen, kommen die negativen Potenzen und der $\ln -$ Term nicht in Frage. Insgesamt erhalten wir die Lösungsdarstellung:

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos(k\varphi) + d_k \sin(k\varphi))\, r^k .$$

Die Randdaten liefern noch die Bedingung

$$\begin{aligned} u(3,\varphi) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos(k\varphi) + d_k \sin(k\varphi)\right) 3^k \\ &= \cos^2(\varphi) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\varphi)\right) . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann die Lösung

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{18} \cos(2\varphi) .$$

Aufgabe 2:

Es sei $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein kubisches Polynom der Form

$$\begin{aligned} P(x,y) &= a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 \\ &\quad + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 \\ &\quad + c_1x + c_2y + d, \end{aligned}$$

mit $a_i, b_j, c_k, d \in \mathbb{R}$. Bestimme alle Koeffizienten, für die P harmonisch auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung: Wir erinnern uns zunächst daran, dass der Laplace-Operator linear ist und berechnen, dass

$$\Delta(b_2xy + c_1x + c_2y + d) = 0,$$

unabhängig von der Wahl der Koeffizienten. Wir erhalten also keine Bedingung an die Koeffizienten b_2, c_1, c_2, d und können diese beliebig wählen.

Für die verbleibenden Terme gilt

$$\begin{aligned} \Delta(a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 + b_1x^2 + b_3y^2) &= \\ 6a_1x + 2a_2y + 2b_1 + 2a_3x + 6a_4y + 2b_3 &= \\ (6a_1 + 2a_3)x + (6a_4 + 2a_2)y + 2(b_1 + b_3). \end{aligned}$$

Damit dieser Ausdruck für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ verschwindet, muss also gelten

$$\begin{aligned} 6a_1 + 2a_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = -3a_1, \\ 6a_4 + 2a_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = -3a_4, \\ b_1 + b_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad b_2 = -b_1. \end{aligned}$$

Damit hat P also die Form (vgl. Seite 65 Vorlesung)

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \alpha(x^3 - 3xy^2) + \beta(y^3 - 3x^2y) + \gamma(x^2 - y^2) \\ &\quad + b_2xy + c_1x + c_2y + d, \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, b_2, c_1, c_2, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit mit zusammenhängendem Rand ∂U, sowie $g : \partial U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei u eine auf dem Abschluss $\overline{U}$ stetige Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad U, \\ u = g & \text{auf} \quad \partial U. \end{cases}$$

Zeige: Falls g keine Nullstellen hat, so hat auch u keine Nullstellen.

(b) Seien

$$V = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \qquad \Gamma = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dann hat das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad V, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \Gamma, \end{cases}$$

die beiden Lösungen

$$u_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad u_2(x,y) = \Phi(|(x,y)|),$$

wobei Φ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung bezeichnet.

Warum widerspricht dies *nicht* dem Satz über die Eindeutigkeit der Lösung (Korollar 2 auf Seite 70 der Vorlesung)?

(c) Seien

$$W_1 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+2)^2 + y^2 < 1\}, \qquad W_2 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 < 1\},$$

sowie $W = W_1 \cup W_2$. Dann ist die Funktion

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x,y)^\top \in \overline{W_1}, \\ 2 & \text{für } (x,y)^\top \in \overline{W_2}. \end{cases}$$

harmonisch auf W, nicht konstant, und nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum auch im Inneren von W an. Warum widerspricht dies *nicht* dem starken Maximumsprinzip?

Lösung.

(a) Da g stetig ist und keine Nullstellen besitzt, gilt entweder $g(x) > 0$ für alle $x \in \partial U$ (und somit $\min_{x \in \partial U} g(x) > 0$), oder $g(x) < 0$ für alle $x \in \partial U$ (und somit $\max_{x \in \partial U} g(x) < 0$). Da $u = g$ auf dem Rand gilt, folgt aus dem Maximumsprinzip im ersten Fall, dass $u(x) > 0$ für alle $x \in U$, und im zweiten Fall, dass $u(x) < 0$ für alle $x \in U$. In beiden Fällen folgt also $u(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

(b) Beachte, dass $(0,0)^\top \notin V$. Die Fundamentallösung ist in $(x,y)^\top = (0,0)^\top$ nicht definiert und lässt sich dort auch nicht stetig fortsetzen. Die Funktion u_2 ist also nicht stetig auf dem Abschluss $\overline{V}$. Korollar 2 sagt aber nur aus, dass es unter den auf $\overline{V}$ stetigen Funktionen höchsten eine Lösung gibt. Dass es weitere Lösungen geben kann, die nicht auf $\overline{V}$ stetig sind, wird dadurch nicht ausgeschlossen.

(c) Die Menge W ist nicht zusammenhängend, was aber eine der Voraussetzungen für das starke Maximumsprinzip ist.

Bearbeitung: 17.06.-21.06.2024