Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

(a) Sei

$$\Omega_2 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2+y^2 < 4\}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_2, \\ u(x,y) = 1 & \text{für} & x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) = 3 & \text{für} & x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?

(b) Sei

$$\Omega_3 = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_3, \\ u(x,y,z) = 1 & \text{für} & x^2+y^2+z^2 = 1, \\ u(x,y,z) = 3 & \text{für} & x^2+y^2+z^2 = 4. \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?

Lösung:

Nach Vorlesung Seite 66 lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

darstellen.

(a) Da $(0,0)^\top \notin \Omega_2$, gilt mit der Fundamentallösung

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln(|(x,y)|)$$

die Form

$$u(x,y) = a\Phi(x,y) + b.$$

Die Randbedingungen verlangen

$$\begin{array}{lll} u(x,y) = 1 & \text{für} & |(x,y)| = 1, \\ u(x,y) = 3 & \text{für} & |(x,y)| = 2. \end{array}$$

Aus der ersten Randbedingung erhalten wir

$\frac{a}{2\pi}\ln(1) + b = b \stackrel{!}{=} 1$

und damit aus der zweiten Randbedingung

$\frac{a}{2\pi}\ln(2) + 1 \stackrel{!}{=} 3 \;\Rightarrow\; a = \frac{4\pi}{\ln(2)}$,

d.h.

$$u(x,y) = \frac{2}{\ln(2)}\ln(|(x,y)|) + 1.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maxiumsprinzip (vgl. Korollar 2, Seite 70 der Vorlesung).

(b) Analog zu Teil (a) liefert die Vorlesung

$$u(x,y,z) = a\Phi(x,y,z) + b, \qquad a,b \in \mathbb{R},$$

mit der Fundamentallösung

$$\Phi(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}|(x,y,z)|^{-1}.$$

Die Randdaten liefern dann die Bedingungen

$$-\frac{a}{4\pi} + b = 1, \qquad -\frac{a}{8\pi} + b = 3 \qquad \Rightarrow \qquad a = 16\pi, \quad b = 5,$$

d.h.

$$u(x,y,z) = -4(|x,y,z|)^{-1} + 5.$$

Die Eindeutigkeit folgt wieder aus dem Maxiumsprinzip.

Aufgabe 2:

Gesucht sei eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta v(x,y) = 0$ in einem rotationssymmetrischen Gebiet, zum Beispiel in einem Kreisring. Das Gebiet lässt sich dann mittels Polarkoordinaten besser beschreiben. Man geht dafür über zu

$x = r\cos\phi\,,\ y = r\sin\phi\,,$ und

$v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi)\ .$

Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ folgende Äquivalenz gilt:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \iff r^2\,(v_{xx} + v_{yy}) \;=\; 0\,.$$

Lösungsskizze:

$$\begin{aligned}
u_r &= v_x \cdot x_r + v_y \cdot y_r = \cos(\phi)v_x + \sin(\phi)v_y\\
u_\phi &= v_x \cdot x_\phi + v_y \cdot y_\phi = -r\sin(\phi)v_x + r\cos(\phi)v_y\\
u_{rr} &= v_{xx}\cos^2(\phi) \;+\; 2v_{xy}\cos(\phi)\sin(\phi) + v_{yy}\sin^2(\phi)\\
u_{\phi\phi} &= v_{xx}r^2\sin^2(\phi) \;+\; 2v_{xy}r^2\cos(\phi)(-\sin(\phi)) + v_{yy}r^2\cos^2(\phi) - r\cos(\phi)v_x - r\sin(\phi)v_y
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} &= (r^2\cos^2(\phi) + r^2\sin^2(\phi))v_{xx}\\
&\quad + (2r^2\cos(\phi)\sin(\phi) - 2r^2\cos(\phi)\sin(\phi)))v_{xy}\\
&\quad + (r^2\sin^2(\phi) + r^2\cos^2(\phi))v_{yy}\\
&\quad + r\cos(\phi)v_x + r\sin(\phi)v_y - r\cos(\phi)v_x - r\sin(\phi)v_y\\
&= r^2(v_{xx} + v_{yy})\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9. \end{aligned}$$

Lösung:

Nach Aufgabe 2 ist für rotationssymmetrische Probleme mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und $u(x,y) = v(r)$ folgende Differentialgleichung zu lösen:

$r^2 v'' + r v' = -r^2(\frac{1}{r}) \overset{r \neq 0}{\Longleftrightarrow} v'' + \frac{1}{r}v' = -\frac{1}{r}.$

Ähnlich wie auf Seite 67 der Vorlesung rechnen wir mit $w := v'$:

$$w' + \frac{1}{r}w = -r^{-1} \Longrightarrow \frac{dw_h}{w_h} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow w_h = \frac{\alpha}{r}.$$

$$w_p := \frac{\alpha(r)}{r} \Longrightarrow \frac{\alpha'(r)}{r} = -\frac{1}{r} \Longrightarrow \alpha'(r) = -1 \Longrightarrow \alpha(r) = -r + c.$$

Zum Beispiel $w_p(r) = -1$

$v'(r) = w(r) = w_h + w_p = \frac{\alpha}{r} - 1$

$\Longrightarrow v(r) = \alpha \cdot \ln(r) - r + \beta$

Die Randdaten liefern für $x^2 + y^2 = 1$:

$$u(x,y) = -1 + \beta = 1 \Longrightarrow \beta = 2$$

und für $x^2 + y^2 = 9$

$$u(x,y) = \alpha\ln(3) - 3 + 2 = 2 \Longrightarrow \alpha = 3/\ln(3).$$

Und im Ring:

$$u(x,y) = \frac{3\ln(r(x,y))}{\ln(3)} - r(x,y) + 2 = \frac{3\ln(\sqrt{x^2+y^2})}{\ln(3)} - \sqrt{x^2+y^2} + 2\,.$$

Abgabe: 17.06.-21.06.2024