Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gesucht ist eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + (u+2)u_x &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \frac{1-x}{2} \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

für $0 < t < t^*$ mit einem hinreichend kleinen t^*.

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) In welchen Intervallen $]0, t^*[$ ist die Lösung aus a) definiert?

c) Sind die Charakteristischen Kurven Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Skizzieren Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2, -1, 0$.

Lösung:

a) **Nach Vorlesung Seite 46/47**

Mit $x_0 = x(0)$, $f(u) = u + 2$ und $u_0(x_0) = \frac{1-x_0}{2}$ erhalten wir

$u(x(t), t) = u(x_0 + \left(\frac{1-x_0}{2} + 2\right) \cdot t,\, t) = \frac{1-x_0}{2}$.

Wobei

$x(t) = x_0 + t(u_0(x_0) + 2) = x_0 + t\left(\frac{1-x_0}{2} + 2\right) = x_0\left(1 - \frac{t}{2}\right) + \frac{5}{2}t$

gilt. Also

$$x_0 = \frac{x - \frac{5}{2}t}{1 - \frac{t}{2}} = \frac{2x - 5t}{2 - t}$$

und damit

$$u(x(t), t) = \frac{1 - \frac{2x-5t}{2-t}}{2} = \frac{2 - t - 2x + 5t}{2(2-t)} = \frac{1 - x + 2t}{2 - t}.$$

Alternativ:

Mit $f(u) = u + 2$ und den Charakteristiken $x(t) = x(0) + tf(u_0(x(0)))$, sowie die Abkürzende Schreibweise $x_0 = x(0)$ erhalten wir

$x_0 = x - t(u_0(x_0) + 2)$

u is konstant entlang der Characteristiken

$u(x,t) = u_0(x_0) = u_0(x - t(u_0(x_0)+2)) = u_0(x - t(u(x,t)+2))$

Also

$u(x,t) = \dfrac{1 - x + t(u(x,t)+2))}{2}$

Auflösung nach u ergibt

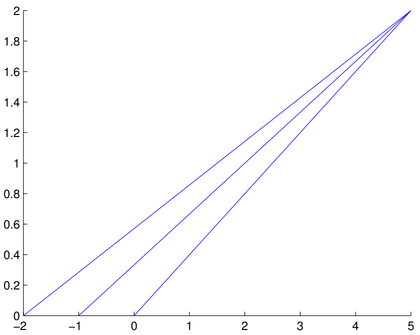
$2u(x,t) = 1 - x + tu(x,t) + 2t \implies (2-t)u(x,t) = 1 - x + 2t$

Also

$$u(x,t) = \frac{1 - x + 2t}{2-t}.$$

b) Die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2, -1, 0$

x_0	$u_0 = u(x_0, 0)$	Steigung $u_0 + 2$
-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
-1	1	3
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$



Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die physikalisch sinnvolle schwache Lösung $u(x,t)$ der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1, \\ 2 & 1 < x. \end{cases}$$

b) Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 2, \\ 0 & 2 < x. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}\,]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.

(ii) Bis zu welchem t* ist die in (i) bestimmte Formel sinnvoll?

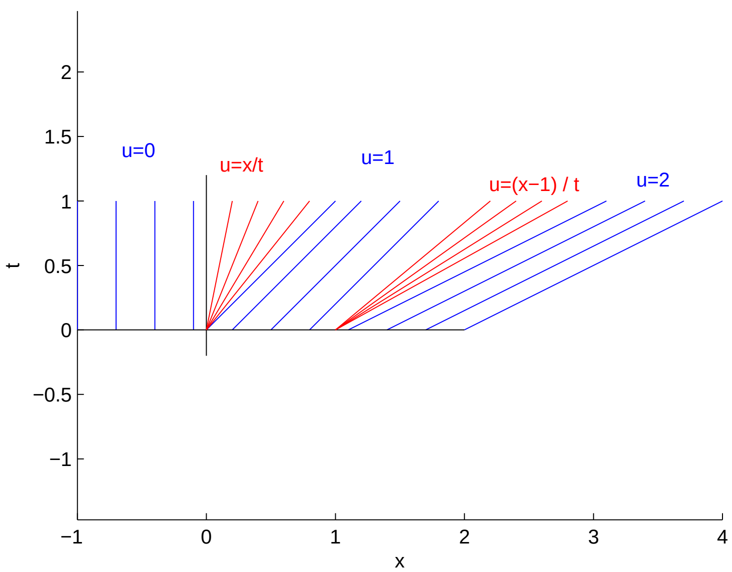
(iii) Geben Sie eine schwache Lösung für alle $t > 0$ an.

Lösungsskizze:

a) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq, 1 \\ 2 & 1 < x. \end{cases}$$

Für die monoton steigenden Anfangsdaten mit zwei Sprungstellen führen wir Zwei Verdünnungswellen ein und erhalten die physikalisch sinnvolle schwache Lösung



$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ \frac{x}{t} & 0 \le x \le t, \\ 1 & t \le x \le t+1, \\ \frac{x-1}{t} & t+1 \le x \le 2t+1, \\ 2 & x \ge 2t+1. \end{cases}$$

b) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \le 0, \\ 1 & 0 < x \le 2, \\ 0 & 2 < x. \end{cases}$$

(i) An den zwei Sprungstellen der Anfangsdaten führen wir zwei Stoßwellen $s_1(t)$ mit $s_1(0) = 0$ und $s_2(t)$ mit $s_2(0) = 2$ ein.

Die Sprungbedingung verlangt:
$\dot{s}_1(t) = \dot{s}_1(t) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ und $\dot{s}_2(t) = \dot{s}_2(t) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Wir erhalten damit die Stoßfronten
$\boxed{s_1(t) = \dfrac{3}{2}t}$ $\boxed{s_2(t) = 2 + \dfrac{t}{2}}$
Für hinreichend kleine t ist

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x \le \frac{3}{2}t, \\ 1 & \frac{3}{2}t < x \le 2 + \frac{t}{2}, \\ 0 & x > 2 + \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

eine schwache Lösung.

(ii) Für t^* mit $s_1(t^*) = s_2(t^*)$ treffen die Stoßfronten aufeinander und die Lösung aus a) wird mehrdeutig.

$$s_1(t^*) = s_2(t^*) \iff \frac{3}{2}t^* = 2 + \frac{t^*}{2} \iff t^* = 2.$$

Die Lösung aus i) gilt also nur für $t < 2$.

(iii) Für $t = 2$ gilt $s_1(t) = s_2(t)$ und es entsteht

$$u(x,2) = \begin{cases} 2 & x \le 3\,, \\ 0 & x > 3\,. \end{cases}$$

Wir fügen die neue Stoßfront
$s_3(t)$ mit $s_3(2) = s_1(2) = s_2(2) = 3$ $\dot{s}_3(t) = \dfrac{2+0}{2} = 1$ also

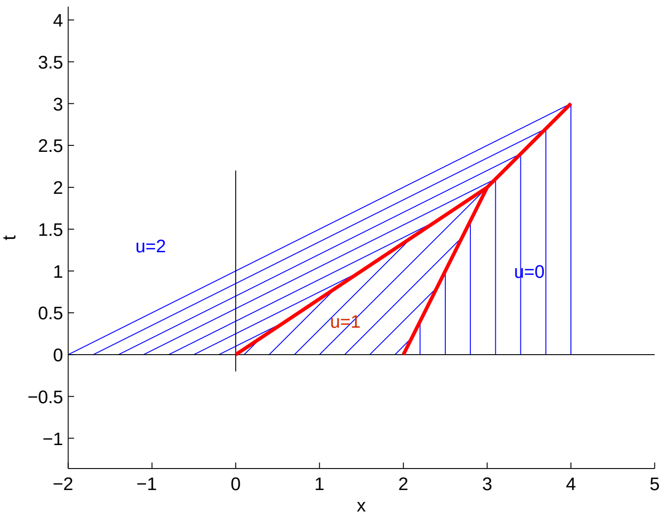
$$\boxed{s_3(t) = t + 1}$$

Für $t \leq 2$ gilt nach Teil a)

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x \leq \frac{3}{2}t, \\ 1 & \frac{3}{2}t < x \leq 2 + \frac{t}{2}, \\ 0 & x > 2 + \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

und für $t \geq 2$ erhalten wir die schwache Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x \leq t+1, \\ 0 & x > t+1. \end{cases}$$



Aufgabe 3)

Gegeben ist die Erhaltungsgleichung $u_t + \left(\frac{u^4}{16}\right)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+$.

a) Sind die Charakteristiken $(x(t), t)$ Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben seien die Anfangsdaten $u(x,0) = 2 + \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Charakteristik durch den Punkt $(0,0)$.

c) Prüfen Sie, welche der unten angegebenen Funktionen $u^*, \tilde{u}, \hat{u}$ eine schwache Lösung zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist.

$$u^*(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{2}t\,. \end{cases} \qquad \tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{15}{16}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{15}{16}t\,. \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 - \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x \leq t, \\ 1 & \text{für } x > t\,. \end{cases}$$

Lösungsskizze:

$u_t + \left(\frac{u^4}{16}\right)_x = 0 \iff u_t + \frac{u^3}{4} u_x = 0\,.$

a) Für die Charakteristiken $\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$ und $\nu(t) := u(\gamma(t))$ verlangen wir

$\dot{\gamma}(t) = \binom{\dot{x}(t)}{1} \overset{!}{=} \binom{\frac{\nu(t)^3}{4}}{1}$ und $\dot{\nu}(t) = 0\,.$

Dann gilt wieder

$\frac{d\nu}{dt} = 0 \implies \nu(t)$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Damit ist $\dot{\gamma}(t) = \binom{\frac{\nu(t)^3}{4}}{1}$ konstant entlang der Charakteristiken und die Charakteristiken sind wieder Geraden.

b) Die Charakteristik durch den Punkt $(0,0)$ ist eine Gerade $(x(t), t)$ durch $(0,0)$ mit

$\dot{x}(t) = \frac{u(x(0),0)^3}{4} = \dfrac{(2 + \arctan(0))^3}{4} = 2$, also die Gerade mit $x = 2t\,.$

c) Eine Stoßfront $s(t)$ einer schwachen Lösung von $u_t + (F(u))_x = 0$ muss die Sprungbedingung

$$\dot{s}(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}$$

erfüllen. Hier also mit $F(u) = \frac{u^4}{16}$

$$\dot{s}(t) = \frac{\frac{u_l^4}{16} - \frac{u_r^4}{16}}{u_l - u_r} = \frac{\frac{2^4}{16} - \frac{1^4}{16}}{2 - 1} = \frac{15}{16}\,.$$

u^* erfüllt nicht die Sprungbedingung: $\dot{s}(t) = \frac{15}{16}$.

$\tilde{u}$ erfüllt die Sprungbedingung und ist außerhalb der Stoßfront eine klassische Lösung. Außerdem gilt, mit konvexem F

$$F'(u_l) = 2 \;>\; \dot{s}(t) = \frac{15}{16} \;>\; F'(u_r) = 2.$$

$\tilde{u}$ ist also eine schwache Lösung.

$\hat{u}$ hat keine Unstetigkeiten. Es ist gibt keine Sprungbedingung, die zu überprüfen wäre!

Zu prüfen bleib, ob $\hat{u}$ in jedem Teilbereich eine klassische Lösung ist. Jede Konstante löst natürlich die Differentialgleichung . Im Bereich $0 < x < t$ gilt allerdings mit

$\hat{u}(x,t) = 2 - \frac{x}{t}$

$\hat{u}_t + \frac{\hat{u}^3}{4}\,\hat{u}_x = \frac{x}{t^2} + (2 - \frac{x}{t})^3(\frac{-1}{4t}) \overset{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \frac{4xt^2 - (2t - x)^3}{4t^4} \overset{!}{=} 0 \iff x^3 - 6tx^2 + 16xt^2 - 8t^3 \overset{!}{=} 0\,.$$

Für festes t kann diese Bedingung höchstens für drei verschiedene x erfüllt sein, aber bestimmt nicht für alle $0 < x \leq t$.

Bearbeitung: 03.06.-07.06.2024