Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie physikalisch sinnvolle Lösungen der Differentialgleichung

$$u_t + (F(u))_x = 0$$

mit der Flussfunktion $F(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$ und den Anfangsbedingungen

a) $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x, \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 2 & 0 < x. \end{cases}$

Hinweis: Gefragt sind nur Lösungen für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Lösung:

Mit $\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$, $\dot{\gamma}(t) = \binom{\dot{x}(t)}{1}$, $\nu(t) := u(\gamma(t))$ und $F(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$ fordern wir auf den charakteristischen Kurven

$\dot{x}(t) = F'(u) = 2(u-2)^3$ und $\dot{\nu}(t) = 0$. **[1 Punkt]**

Die Charakteristiken sind Geraden mit konstanter Steigung $\frac{dx}{dt} = 2(u(x(0),0)-2)^3$. Optisch in der $x-t-$ Ebene sehen wir Geraden mit der Steigung $\dfrac{1}{2(u(x(0),0)-2)^3}$.

In Teil a) entsteht bereits bei $t=0$ eine Mehrdeutigkeit der Lösung über die Charakteristiken Methode. Es muss mit $u_l = 2$ und $u_r = 1$ eine Stoßfront $s(t)$ mit

$$\dot{s}(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{\frac{(2-2)^4}{2} - \frac{(1-2)^4}{2}}{2-1} = -\tfrac{1}{2} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

eingeführt werden. Man erhält

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = 2 & x < s(t) = -\frac{t}{2} \\ u_r = 1 & -\frac{t}{2} < x. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{cases}$$

Für Teil b) liefert die Charakteristiken Methode

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 + F'(u_l)t = 0 + 2(1-2)^3 t = -2t\,, \\ ? & -2t \leq x \leq 0\,, \\ 2 & x \geq x_0 + F'(u_r)t = 0 + 2(2-2)^3 t = 0\,. \end{cases}$$

Es muss also eine Verdünnungswelle eingeführt werden. **[1 Punkt]**

Mit

$F'(u) = 2(u-2)^3 =: z \implies u = g(z) := (F')^{-1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 2$

erhält man die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq -2t\,, \\ g(\frac{x}{t}) = \left(\frac{x}{2t}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 & -2t \leq x \leq 0, \\ 2 & x \geq 0. \end{cases}$$ **[2 Punkte]**

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die physikalisch sinnvolle schwache Lösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1, \\ 0 & 1 < x. \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$.

Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

Bestimmen Sie die Lösung für $t > 2$.

Lösungsskizze: $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1, \\ 0 & 1 < x. \end{cases}$$

Wie auf Blatt 3 lösen wir mit den Bezeichnungen

$\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$, $\dot\gamma(t) = \binom{\dot x(t)}{1}$, $\nu(t) := u(\gamma(t))$

die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$\frac{dx}{dt} = \nu(t)\,, \qquad \frac{d\nu}{dt} = 0\,.$

Aus der zweiten gewöhnlichen Differentialgleichungfolgt unmittelbar

$$\nu(t) = D = \nu(0) = u(x(0), 0). \tag{1}$$

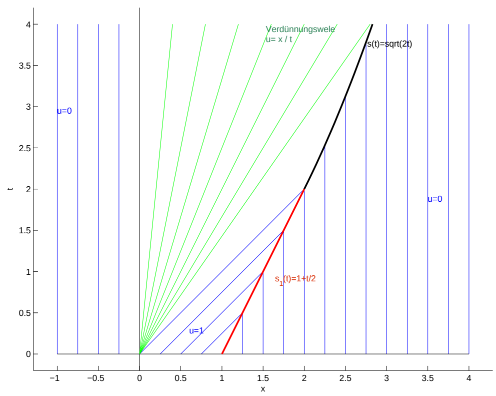
Die erste gewöhnlichen Differentialgleichunglautet damit

$\frac{dx}{dt} = \nu(t) = D$

$\Longrightarrow x(t) = D\,t + C = \nu(t)\,t + C = \nu(0)\,t + C = u(x(0), 0)t + C.$

Damit ist klar:

- die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken
- die Charakteristiken sind in der $(x,t)-$ Ebene Geraden mit der Steigung $\frac{1}{u(x(0),0)}$.



Zunächst erhalten wir also eine Verdünnungswelle und eine Stoßwelle mit
$\dot{s}(t) = \dfrac{1+0}{2}$, $s(t) = s(0) + \dot{s}(0)t = 1 + \frac{t}{2}$.

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & 0 < x \leq t, \\ 1 & t < x \leq 1 + \frac{t}{2}, \\ 0 & 1 + \frac{t}{2} < x. \end{cases}$$

Diese Lösung gilt bis t^* mit $t^* = 1 + \frac{t^*}{2}$, also $t^* = 2$.

Zum Zeitpunkt $t^* = 2$ gilt

$$u(x,2) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & 0 < x \leq 2, \\ 1 & 2 < x \leq 2, \\ 0 & 1 + \frac{t}{2} < x. \end{cases}$$

Die Verdünnungswelle trifft auf die Stoßwelle.

Für $t \geq 2$ gilt für die Unstetigkeit mit
$u_l = \dfrac{x}{t}$, $\quad u_r = 0$ und $x = s(t)$ auf der Unstetigkeitskurve

$\dot{s}(t) = \dfrac{\frac{s(t)}{t} + 0}{2} = \dfrac{s(t)}{2t}$ Dies ist eine gewöhnliche Dgl. für $s(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ds}{s} = \dfrac{dt}{2t} \qquad \Longrightarrow \quad s = c\sqrt{t} \\ s(2) = 2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad c = \sqrt{2}, \;\; s = \sqrt{2t}$$

Die Unstetigkeit bewegt sich also auf der Kurve $x(t) = \sqrt{2t}$ weiter.

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x \leq \sqrt{2t}, \\ 0 & x > \sqrt{2t}. \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 2 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x,t) =$ Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t) =$ Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t) = v(x,t)u(x,t) =$ Fluss im Punkt x zum Zeitpunkt t

$=$ Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

Wir verfeinern unser Modell aus Blatt 2, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit

$u_{max} =$ maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

$v_{max} =$ maximale Geschwindigkeit

einführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x,t)) = v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right)$$

a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.

b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

c) Bestimmen Sie eine schwache Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangsdaten

$$v_{max} = 1 \quad \text{(Hier ist geeignet skaliert worden!)}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = \frac{u_{max}}{2} & x \le 0 \quad \text{(normaler Verkehr)}, \\ u_m = u_{max} & 0 < x \le 1 \quad \text{(rote Ampel/ Stau)}, \\ u_r = 0 & x > 1 \quad \text{(leere Strasse)} \end{cases}$$

für $t \in (0,2)$.

d) Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen und bei $u_l < u_r$ eine Verdünnungswelle eingefügt.

Sind hier für $u_l < u_r$ Verdünnungswellen möglich?

Bleiben Stoßwellen nur für $u_l > u_r$ physikalisch sinnvoll?

Hier müssen offensichtlich andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern.

Lösungshinweis zu Aufgabe 3:

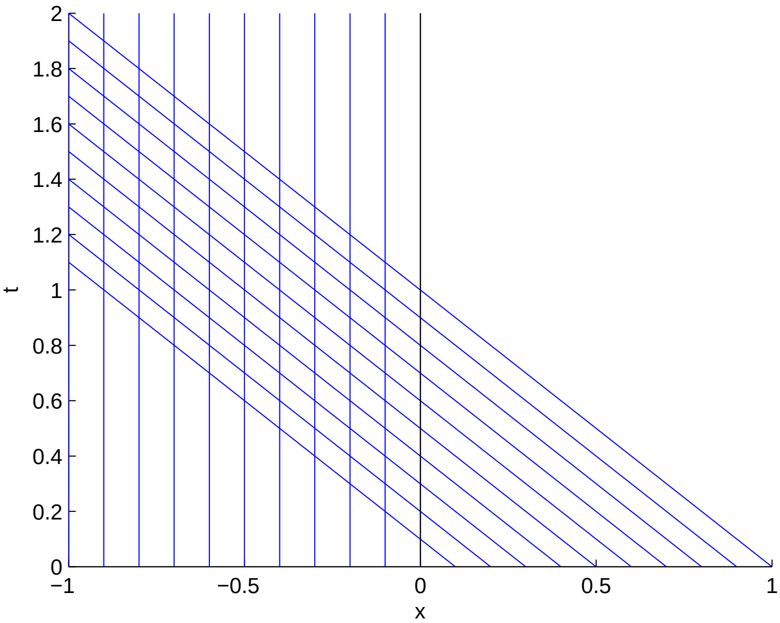
a) $u_t + \left(v_{max}\, u\, (1 - \frac{u}{u_{max}})\right)_x = u_t + \left(v_{max}\, (u - \frac{u^2}{u_{max}})\right)_x = u_t + (v_{max}\, (1 - \frac{2u}{u_{max}}))u_x = 0$

b) Auf den Charakteristiken $x(t)$ gilt wieder (vgl. z.B. Aufgabe 1 und 2):
$\dot{x}(t) = \left(v_{max}\, (1 - \frac{2u}{u_{max}})\right)$ und $\dot{\nu}(t) = \frac{d}{dt} u(x(t), t) = 0\,.$
Die Charakteristik durch einen Punkt $(x(0), 0)$ hat als Gerade in der $x-t-$ Ebene die konstante Steigung $(v_{max}\, (1 - \frac{2u(x(0),0)}{u_{max}})^{-1}$. Damit sind die Charakteristiken wieder Geraden.

c) Auf den Charakteristiken gilt

$$\dot{x}(t) = 1 - \frac{2u(x(0), 0)}{u_{max}} = \begin{cases} 0 & x(0) \leq 0, \\ -1 & 0 < x(0) \leq 1, \\ 1 & x(0) > 1. \end{cases}$$

Eine Skizze der Charakteristiken für $x(0) \leq 1$ zeigt, dass in $(0,0)$ nur eine Stoßwelle eingeführt werden kann:



Die Sprungbedingungen verlangt

$$\dot{s}(t) = \frac{F(u_l) - F(u_m)}{u_l - u_m}$$

wobei wir für $v_{max} = 1$ rechnen
$F(u_l) = v_{max}\, (\frac{u_{max}}{2} - \frac{u_{max}^2}{4u_{max}}) = \frac{u_{max}}{4}$ und
$F(u_m) = v_{max}\, (u_{max} - \frac{u_{max}^2}{u_{max}}) = 0\,.$

Also

$$\dot{s}(t) = \frac{F(u_l) - F(u_m)}{u_l - u_m} = \frac{\frac{u_{max}}{4}}{-\frac{u_{max}}{2}} = -\frac{1}{2}$$

und

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = \frac{u_{max}}{2} & x \leq s(t) = -\frac{t}{2} \\ u_m = u_{max} & -\frac{t}{2} < x \leq 1 - t\,. \end{cases}$$

Für $x(0) \geq 1$ erhält mit der Charakteristiken Methode

$u(x,t) = u_r = 0$ für $x \geq 1 + t$

Der Bereich $1 - t < x < 1 + t$ wird mit einer Verdünungswelle gefüllt.

$F'(u) = 1 - \dfrac{2u}{u_{max}} =: z \Longrightarrow u = g(z) := (F')^{-1}(z) = \frac{u_{max}(1-z)}{2}.$

Insgesamt erhalten wir die schwache Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = \frac{u_{max}}{2} & x \leq s(t) = -\frac{t}{2}, \\ u_m = u_{max} & -\frac{t}{2} < x \leq 1 - t\,, \\ g(\frac{x-1}{t}) = \frac{u_{max}(1-\frac{x-1}{t})}{2} & 1 - t < x \leq 1 + t \\ u_r = 0 & 1 + t < x\,. \end{cases}$$

d) Die Bedingung $u_l > u_r$ für Stoßfronten gilt nur für konvexe Flussfunktionen F (hier q). In unserem Beispiel ist F' monoton fallend ist, F also konkav.

Wie in Teil c) gesehen, entsteht bei $u_l < u_r$ und damit $F'(u_l) > F'(u_r)$ eine Mehrdeutigkeit der Lösung. Die Charakteristiken laufen ineinander und es bleibt kein Raum zur Einfügung einer Verdünnungswelle. Eine Stoßwellenlösung, die die Sprungbedingung erfüllt, ist die physikalisch sinnvolle schwache Lösung.

Was immer noch gilt ist die Anschauliche Interpretation : Aus der Stoßwelle kommt keine Information raus! Also

$$F'(u_l) > \dot{s} > F'(u_r)$$

Da F' monoton fallend ist, ergibt sich für Stoßwellen die Bedingung $u_l < u_r$.

Für $u_l > u_r$ liefert das Einfügen einer Verdünnungwelle im freien Raum zwischen den (zum Beispiel mit der Charakteristiken Methode erhaltenen) Charakteristiken die physikalisch sinnvolle schwache Lösung.

Abgabetermine: 03.06.-07.06.2024