Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 4t\,u_x &= 3\,, \qquad && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(2x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$.

Lösung:

a) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man für

$\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$ mit $\dot\gamma(t) = \binom{\dot x(t)}{1}$

und $\nu(t) := u(\gamma(t))$

$\frac{dx}{dt} = 4t \implies dx = 4tdt \implies x = 2t^2 + C_1$

$\frac{d\nu}{dt} = 3 \implies d\nu = 3dt \implies \nu(t) = 3t + C_2$

b) Mit $C_1 = x - 2t^2$ und $x(0) = C_1$

und der Anfangsbedingung

$\nu(0) = 3 \cdot 0 + C_2 \stackrel{!}{=} \sin(2x(0)) \implies C_2 = \sin(2x(0)) = \sin(2C_1)$

erhalten wir

$\nu(t) = 3t + \sin(2C_1) = 3t + \sin(2(x(t) - 2t^2))$

und damit die Lösung:

$u(x,t) = 3t + \sin(2x - 4t^2)\,.$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + \tfrac{1}{2} u_x = -4u, \qquad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = \tfrac{2\sin(x)}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man für

$\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$ mit $\dot\gamma(t) = \binom{\dot x(t)}{1}$

und $\nu(t) := u(\gamma(t))$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{t}{2} + C \Longrightarrow 2x - t = C\,,$

$\frac{d\nu}{dt} = -4\nu \Longrightarrow \frac{d\nu}{\nu} == -4\,dt \Longrightarrow \ln(|\nu|) = -4t + d.$

$|\nu| = e^{-4t} \cdot \tilde d, \qquad \tilde d \in \mathbb{R}^+$

Da $\nu = 0$ ebenfalls eine Lösung ist, erhalten wir für beliebige $D \in \mathbb{R}$ eine Lösung

$\nu(t) = D \cdot e^{-4t}, \qquad D \in \mathbb{R}, \qquad \text{also} \qquad D = \nu(t) \cdot e^{4t}\,.$

Die Anfangsbedingung verlangt:

$\nu(0) = D \cdot e^0 = D \stackrel{!}{=} u(x(0),0) = \frac{2\sin(x(0))}{1+(x(0))^2}\,.$

Wir berechnen das zugehörige $x(0)$ aus der Lösung der ersten charakteristischen Differentialgleichung

$2x(t) - t = C \Longrightarrow x(0) = \frac{C}{2} = \frac{2x(t)-t}{2}$

und damit

$$D = \frac{2\sin(\frac{2x(t)-t}{2})}{1 + \left(\frac{2x(t)-t}{2}\right)^2} \Longrightarrow \nu(t) = D \cdot e^{-4t} = e^{-4t} \frac{2\sin(\frac{2x(t)-t}{2})}{1 + \left(\frac{2x(t)-t}{2}\right)^2}$$

und

$u(x,t) = 8\,e^{-4t}\,\frac{\sin(\frac{2x-t}{2})}{4+(2x-t)^2}\,.$

Aufgabe 3: (Nur für die sehr schnellen Rechner)
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u_t + 3u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \forall x > 0 \end{cases}$$

a) Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem auf.

b) Sind die Charakteristiken Geraden?

c) Zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_k, 0) := (k, 0)$ für $k \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.
Geben Sie an, welche Werte die Lösung, die Sie durch die Methode der Charakteristiken erhalten, entlang dieser Charakteristiken annimmt.

d) Können Sie mit Hilfe der Teile a)- c) die Werte von $u(x,t)$ in den Punkten $(-1,2), (1,2)$ und $(3,2)$ angeben?

Lösung:

a) Analoges Vorgehen wie in Aufgabe 1 und 2 liefert

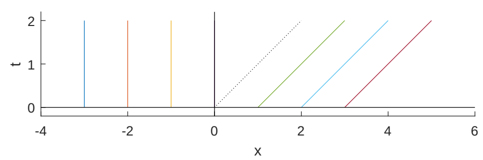
$$\frac{dx}{dt} = 3u(x(t),t) = 3\nu(t), \qquad \frac{d\nu}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\nu = D, \qquad dx = 3Ddt$$

$$\Longrightarrow x(t) = 3Dt + C = 3\nu t + C \Longrightarrow C = x - 3\nu t\,.$$

b) Die Charakteristiken sind Geraden, denn auf den Charakteristiken gilt
$\frac{d\nu}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \nu$ ist also entlang jeder Charakteristik konstant. Außerdem gilt
$\frac{dx}{dt} = 3\nu \qquad \Longrightarrow$ also ist $\frac{dx}{dt}$ konstant entlang der Charakteristik. D.h.
die Steigung der Charakteristiken ist konstant. Es handelt sich um Geraden.

c) Skizze:



$u(x,t) = 0$ für alle Punkte auf den Charakteristiken durch $(x_k, 0) = (k, 0)$ für $k \in \{-3, -2, -1, 0\}$.

$u(x,t) = \frac{1}{3}$ für alle Punkte auf den Charakteristiken durch $(x_k, 0) = (k, 0)$ für $k \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

d) Aus der Skizze entnimmt man $u(x,t) = 0, \forall x \leq 0$. Insbesondere also $u(-1, 2) = 0$.

Weiter entnimmt man der Skizze $u(x,t) = \frac{1}{3}, \forall x > t$. Insbesondere also $u(3,2) = \frac{1}{3}$.

Die Charakteristiken helfen nicht bei der Bestimmung der Lösungswerte $u(x,t)$ für $0 < x < t$, also zum Beispiel $u(1,2)$.

Die Lösung dieses Problems wird voraussichtlich auf dem nächsten Blatt behandelt.

Bearbeitungstermine: 13.05.-17.05.2024