Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - \sin(t)\, u_x &= \cos(t)\,, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \exp(-x^2) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$.

Lösung:

a) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man für

$\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$ mit $\dot\gamma(t) = \binom{\dot x(t)}{1}$

und $\nu(t) := u(\gamma(t))$

$\frac{dx}{dt} = -\sin(t) \Longrightarrow dx = -\sin(t)dt \Longrightarrow x(t) = \cos(t) + C_1\,,$

$\frac{d\nu}{dt} = \cos(t) \Longrightarrow d\nu = \cos(t)dt \Longrightarrow \nu(t) = \sin(t) + C_2\,.$

b) Mit $C_1 = x - \cos(t)$ und $x(0) = \cos(0) + C_1 = 1 + C_1$

und der Anfangsbedingung

$\nu(0) = \sin(0) + C_2 \stackrel{!}{=} e^{-x(0)^2} \Longrightarrow C_2 = e^{-x(0)^2} = e^{-(1+C_1)^2}$

erhalten wir

$\nu(t) = \sin(t) + e^{-(1+x(t)-\cos(t))^2}$

und damit die Lösung:

$u(x,t) = \sin(t) + e^{-(x-\cos(t)+1)^2}\,.$

Aufgabe 2:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 3u_x + y^2 u_y &= 0\,, & x,y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,\\ u(x,y,0) &= \tfrac{\cos(x)}{1+y^2} & x,y \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung:

a) Auf den Charakteristiken $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ t \end{pmatrix}$ gilt $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

und mit $\nu(t) := u(\gamma(t))$

$\frac{dx}{dt} = 3 \Longrightarrow dx = 3dt \Longrightarrow x(t) = 3t + C_1 \Longrightarrow C_1 = x - 3t\,,$

$\frac{dy}{dt} = y^2 \Longrightarrow \frac{dy}{y^2} = dt \Longrightarrow -\frac{1}{y} = t - C_2 \Longrightarrow C_2 = t + \frac{1}{y} = \frac{1+ty}{y}\,,$

$\frac{d\nu}{dt} = 0 \Longrightarrow \nu(t) = D\,.$

Zur Erfüllung der Anfangsbedingung berechnen wir

$x(t) = 3t + C_1 \Longrightarrow x(0) = C_1,$
$-\frac{1}{y(t)} = t - C_2 \Longrightarrow y(0) = \frac{1}{C_2}.$

Anfangsbedingung:
$\nu(0) = u(x(0), y(0), 0) = D \overset{!}{=} \frac{\cos(x(0))}{1+y(0)^2} = \frac{\cos(C_1)}{1+\frac{1}{(C_2)^2}}\,.$

Einsetzen von C_1 und C_2 ergibt schließlich für u:
$u(x,y,t) = \frac{\cos(x-3t)}{1+\frac{y^2}{(1+ty)^2}} = \frac{\cos(x-3t)(1+ty)^2}{y^2+(1+ty)^2}\,.$

Aufgabe 3:

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 20\, u_x = 21u\,.$
B) $u_t + 20u\, u_x = 21\,.$
C) $u_t - 5u^2\, u_x = 0.$
D) $u_t + 5(x+1)\, u_x = 0.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,,$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A, B, C, D gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und/oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken.
ii) Die Charakteristiken sind Geraden.

Begründen Sie Ihre Antworten. Beachten Sie, dass Sie keine Lösungen berechnen müssen!

Lösung zu 3:

Entlang der Charakteristiken

$\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$ mit $\dot\gamma(t) = \binom{\dot x(t)}{t}$

gelten mit $\nu(t) := u(\gamma(t))$ folgende Aussagen.

Für A) gilt

$\frac{d\nu}{dt} = 21\nu \Longrightarrow \nu$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 20\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also konstant. Es handelt sich um Geraden.

Für B) gilt

$\frac{d\nu}{dt} = 21 \Longrightarrow \nu$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 20\nu\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also nicht konstant. Es handelt sich nicht um Geraden.

Für C) gilt

$\frac{d\nu}{dt} = 0 \Longrightarrow \nu$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = -5\nu^2\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also konstant. Es handelt sich um Geraden.

Für D) gilt $\frac{d\nu}{dt} = 0 \Longrightarrow \nu$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Die Charakteristiken haben die Steigung $\frac{dx}{dt} = 5(x+1)\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist nicht konstant. Es handelt sich nicht um Geraden.

Abgabe: 13.05.-17.05.2024