Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

(a) Sei $a \neq 0$ eine gegebene Konstante und $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass durch

$$u(t,x) = u_0(x - at)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben ist.

(b) Finde Lösungen u und v der folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = e^{-x^2}, & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = \sin(\pi x), & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Zeige, dass durch $w = u + v$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0,x) = e^{-x^2} + \sin(\pi x), & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben ist.

Lösung:

(a) Sei $u(t,x) = u_0(x - at)$. Dann gilt nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -au_0'(x - at), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = u_0'(x - at),$$

also ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0.$$

Außerdem gilt $u(0,x) = u_0(x)$, somit ist auch die Anfangsbedingung erfüllt.

(b) Nach Teil (a) erhalten wir Lösungen durch

$$u(t,x) = e^{(x-t)^2}, \qquad v(t,x) = \sin(\pi(x-t)).$$

Sei nun $w = u + v$. Dann gilt wegen der Linearität der Ableitung

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial v}{\partial t}(t,x), \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t,x).$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) \;=\; \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)}_{=0} \;+\; \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial v}{\partial x}(t,x)}_{=0} \;=\; 0.$$

Da

$$w(0,x) \;=\; u(0,x) + v(0,x) \;=\; e^{-x^2} + \sin(\pi x),$$

ist auch die Anfangsbedingung erfüllt.

Aufgabe 2:

(a) Zeige, dass durch

$$u(t,x) = \frac{x}{t+1} \qquad \text{und} \qquad v(t,x) = 1 \qquad \text{für} \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$$

jeweils Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x, & \text{für} \qquad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + v(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = 1, & \text{für} \qquad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben sind.

(b) Zeige, dass $w = u + v$ mit u und v aus Teil (a) *keine* Lösung von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + w(t,x)\dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0,x) = x+1, & \text{für} \qquad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ist. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen der hier betrachteten Differentialgleichung und der Differentialgleichung in Aufgabe 1?

Lösung.

(a) Wir rechnen direkt nach:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\frac{x}{(t+1)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{t+1}.$$

Damit ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \;=\; -\frac{x}{(t+1)^2} + \frac{x}{t+1} \cdot \frac{1}{t+1} \;=\; 0.$$

Weiterhin gilt $u(0,x) = x$.

Die konstante Funktion v erfüllt

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0$$

und löst somit auch die Differentialgleichung.

(b) Mit

$$w(t,x) \;=\; \frac{x}{t+1} + 1 \;=\; \frac{x+t+1}{t+1}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) \;=\; -\frac{t+1-(x+t+1)}{(t+1)^2} \;=\; -\frac{x}{(t+1)^2}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) = \frac{1}{t+1}.$$

Also gilt

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + w(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \;=\; -\frac{x}{(t+1)^2} + \frac{x+t+1}{t+1}\cdot\frac{1}{t+1} \;=\; \frac{1}{t+1} > 0.$$

Die Differentialgleichung ist also nicht erfüllt.

Die Unterschied zur *linearen* Differentialgleichung $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ist, dass $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$ keine *lineare* Differentialgleichung ist, sondern eine quasilineare Differentialgleichung . Wir sehen also, dass für quasilineare Probleme die Summe von zwei Lösungen im Allgemeinen keine Lösung ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= \ 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= -4\sin(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution $\alpha \,=\, x + t,\ \mu \,=\, x - 2t\,.$

Lösungshinweise:

Mit der Substitution $\alpha = x + t\,,\ \mu = x - 2t$ erhalten wir

$$x = \frac{1}{3}(2\alpha + \mu), \quad t = \frac{1}{3}(\alpha - \mu),$$

also

$$u(x,t) = u\left(\frac{1}{3}(2\alpha + \mu), \frac{1}{3}(\alpha - \mu)\right) =: v(\alpha, \mu)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} v_\alpha &= u_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{2}{3}u_x + \frac{1}{3}u_t \\ v_{\alpha\mu} &= \left(u_{xx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{xt} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu}\right) + \left(u_{tx} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{tt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu}\right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}u_{xx} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) u_{xt} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}u_{tx} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) u_{tt} \\ &= -\frac{1}{9}\left(u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx}\right). \end{aligned}$$

Für jede zwei mal stetig differenzierbare Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gilt mit den eingeführten Bezeichnungen also $\boxed{v_{\alpha\mu} \,=\, 0.}$

Daraus folgt

$$v_\alpha(\alpha, \mu) = \tilde{\phi}(\alpha) \implies v(\alpha, \mu) = \phi(\alpha) + \chi(\mu)$$

bzw.

$$u(x,t) =\ \phi(x + t) + \chi(x - 2t)$$

mit hinreichend glatten Funktionen ϕ und χ. Aus den Anfangswerten ergeben sich die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \phi(x) + \chi(x) \overset{!}{=} \cos(x) \quad \text{sowie} \\ u_t(x,0) &= \phi'(x) - 2\chi'(x) \overset{!}{=} -4\sin(x) \ \Rightarrow\ \phi(x) - 2\chi(x) \overset{!}{=} -4\int_{x_0}^{x} \sin(z)\,dz. \end{aligned}$$

Addiert man nun das Zweifache der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung hinzu, folgt damit

$$3\phi(x) = 2\cos(x) + 4\cos(x) - 4\cos(x_0).$$

Subtraktion der beiden Bedingungen führt zu

$$3\chi(x) = \cos(x) - 4\cos(x) + 4\cos(x_0).$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher gegeben durch

$$u(x,t) = 2\cos(x+t) - \cos(x-2t).$$

Bearbeitung: 29.04-03.05.2024