Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung DGL I)

a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Bestimmen Sie alle Lösungen der Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ-werte, für die es nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungen, die nicht konstant gleich Null sind) gibt, heißen Eigenwerte der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen Eigenfunktionen.

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

a) Nach DGL I berechnen wir das charakteristische Polynom : $\mu^2 - \lambda \;=\; 0$ mit den Nullstellen

$$\mu_{1,2} \;=\; \pm\sqrt{\lambda} \quad \Longrightarrow y(t) = \begin{cases} c_1\, e^{\sqrt{\lambda}t} \;+\; c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}t} & \lambda \;>\; 0\,, \\ c_1 \;+\; c_2 t & \lambda \;= 0\,, \\ c_1\, \cos(\sqrt{-\lambda}t) \;+\; c_2\, \sin(\sqrt{-\lambda}t) & \lambda \;<\; 0\,. \end{cases}$$

b) Im Fall $\lambda \;>\; 0$ folgt aus dem Randwert für $t = 0$ unmittelbar $c_2 = -c_1$. Der Randwert in L liefert dann:

$$c_1\, \left(e^{\sqrt{\lambda}L} \;-\; e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) \;=\; 0 \Longrightarrow c_1\, \left(e^{2\sqrt{\lambda}L} \;-\; 1\right) \;=\; 0 \;\Longrightarrow c_1 = 0$$

In diesem Fall gibt es also nur die triviale Lösung $y(t) = 0$

Im Fall $\lambda \;=\; 0$ ist die Lösung eine lineare Funktion. Die einzige lineare Funktion, die sowohl in $t = 0$, als auch in $t = L > 0$ verschwindet, ist wieder die triviale Lösung.

Im Fall $\lambda \;<\; 0$ folgt aus dem Randwert für $t = 0$ unmittelbar $c_1 = 0$. Der Randwert in L liefert dann:

$$c_2\, \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \;\vee\; \sqrt{-\lambda}L = k\pi$$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für $\lambda \;=\; -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, k \in \mathbb{N}$, nämlich die Funktionen $y_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}t\right)$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie geeignete reelle Fourier-Reihen der folgenden Funktionen:

a) Ungerade $2L-$ periodische Fortsetzung von
$f\,:\,[0,1[\to\mathbb{R},\quad f(t)=\sin(4\pi t)+2\sin(6\pi t)\quad L=1\,.$

b) Gerade $2L-$ periodische Fortsetzung von
$f:[0,\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R},\quad L=\frac{\pi}{2}$ und

$$f(t)\;=\;\begin{cases}2, & 0\le t<\frac{\pi}{4},\\ 0, & \frac{\pi}{4}\le t<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Geben Sie die ersten vier nicht verschwindenden Summanden der Fourier-Reihe an.

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a) Da die Funktion $f(t)$ ungerade fortgesetzt wird, bestimmt man eine Fourier–Sinus–Reihe. Da $2L$ eine Periode der Funktion ist, wählt man $2L-$ periodische Sinusfunktionen. Wir bestimmen also eine Reihe der Form

$$F(t)\;=\;\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,\sin\left(k\frac{2\pi}{2L}\,t\right)$$

$$L=1\implies F(t)\;=\;\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,\sin\left(k\pi t\right)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen zwischen den Funktionen $\sin(k\pi t)$ und $\sin(l\pi t)$ (vgl. Mathe II) bzw.durch die Überlegung, dass die Fourierreihe eine möglichst gute Approximation von f sein soll, liest man hier direkt ab:

$$b_4=1\,,\quad b_6=2\,,\quad b_k=0\quad\text{sonst.}$$

b) Da die Funktion $f(t)$ gerade fortgesetzt wird, bestimmt man eine Fourier–Cosinus–Reihe. Da $2L$ eine Periode der fortgesetzten Funktion ist, wählt man $2L-$ periodische Cosinusfunktionen. Mit $2L=\pi$ macht man also den Ansatz

$$F(t)\;=\;\frac{a_0}{2}\;+\;\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}\,t\right)$$

Für die Koeffizienten gilt mit $T=\pi$

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos\left(k\omega t\right)dt\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}t\right)dt+\frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}0\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}t\right)dt\\&=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2kt)dt\end{aligned}$$

Für $k = 0$ erhält man
$$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dt = \frac{8}{\pi}[t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$$
und für $k > 0$ ergibt sich

$$a_k = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2kt)dt = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Es folgt
$$a_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 0 & k = 2m,\ m \in \mathbb{N} \\ \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} & k = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$
und somit
$$a_0 = 2 \qquad a_1 = \frac{4}{\pi} \qquad a_3 = -\frac{4}{3\pi} \qquad a_5 = \frac{4}{5\pi} \cdots$$
Die ersten vier nicht verschwindenden Summanden der Fourier-Reihe lauten z.B.
$$1 + \frac{4}{\pi}\cos(2t) - \frac{4}{3\pi}\cos(6t) + \frac{4}{5\pi}\cos(10t).$$

Bearbeitung: 15-19.04.2024