Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung Analysis II)

Für die Ableitung Parameterabhängiger Integrale gilt bei hinreichender Glattheit von f die **Leibniz–Regel** :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + b'(x)\,f(x,b(x)) - a'(x)\,f(x,a(x))}$$

Gegeben Sei die Funktion

$$F(x) := \int_{-x}^{x^2} e^{xt}\,dt\,.$$

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F(x)$ indem Sie

(i) erst nach t integrieren und anschließend nach x ableiten,

(ii) erst nach x ableiten und anschließend nach t integrieren.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} F'(x)$.

Lösung zu 1:

a) Für $x \neq 0$ rechnet man

(i)

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{xt}}{x}\Bigg|_{-x}^{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^3}-e^{-x^2}}{x}\right) \\ &= \frac{(3x^2e^{x^3}+2xe^{-x^2})x-(e^{x^3}-e^{-x^2})}{x^2} = 3x\,e^{x^3}+2e^{-x^2}-\frac{1}{x^2}\left(e^{x^3}-e^{-x^2}\right)\,. \end{aligned}$$

(ii) $F(x) = \int\limits_{-x}^{x^2} e^{xt}\,dt\,, \qquad b(x) := x^2,\ a(x) := -x,\ f(t,x) := e^{xt}$

$$\begin{aligned} b'(x) &= 2x & a'(x) &= -1 \\ f(b(x),x) &= e^{x^3} & f(a(x),x) &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt + b'(x)f(b(x),x) - a'(x)f(a(x),x) \\ &= \int\limits_{-x}^{x^2} te^{xt}\,dt + 2x\,e^{x^3} + e^{-x^2} \\ &= \left[\frac{t}{x}e^{tx}\right]_{-x}^{x^2} - \int\limits_{-x}^{x^2} \frac{1}{x}e^{xt}\,dt + 2x\,e^{x^3} + e^{-x^2} \\ &= 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\left[e^{tx}\right]_{-x}^{x^2} = 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\left(e^{x^3} - e^{-x^2}\right). \end{aligned}$$

b) Unter Verwendung der Regel von l'Hospital rechnet man:

$$\begin{aligned} F'(0) &= 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2}\Big|_{x=0} - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(e^{x^3} - e^{-x^2}) \\ &= 2 - \lim_{x\to 0} \frac{3x^2e^{x^3} + 2xe^{-x^2}}{2x} = 2 - \lim_{x\to 0} \frac{3xe^{x^3} + 2e^{-x^2}}{2} \\ &= 2 - 1 = 1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

In dieser Aufgabe wollen wir uns zur Wiederholung mit den *Differentialoperatoren*

$$\operatorname{div}, \quad \mathbf{grad}, \quad \mathbf{rot}, \quad \Delta, \quad \nabla$$

beschäftigen, die wir in der Analysis III kennengelernt haben.

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in D$. Wir betrachten Funktionen

- $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x}))^\top$,
- $g : D \to \mathbb{R}$,

Dabei seien $\boldsymbol{f}$ und g jeweils $\mathcal{C}^3$-Funktionen.

(a) Geben Sie an, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind. Geben Sie für die definierten Ausdrücke an, ob sie Vektoren in $\mathbb{R}^3$ oder Zahlen in $\mathbb{R}$ sind.

(i) $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, f)(\boldsymbol{x})$,

(ii) $\mathbf{grad}\,(\Delta g)(\boldsymbol{x})$,

(iii) $\mathbf{rot}\,(\operatorname{div} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$,

(iv) $\Delta(\operatorname{div} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\, f)(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{rot}\,(\nabla g)(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\nabla(\operatorname{div} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(\boldsymbol{x}) \\ \Delta f_2(\boldsymbol{x}) \\ \Delta f_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Lösungsskizze Aufgabe 2:

(a) Wir bemerken zunächst, dass wir für alle auftretenden Funktionen hinreichende Differenzierbarkeit vorausgesetzt haben. Die Frage ist aslo, ob die entsprechenden Differentialoperatoren auf die jeweiligen Funktionen angewendet werden können.

(i) Der Gradient ist nur für reellwertige Funktionen definiert also existiert $\mathbf{grad}\, \boldsymbol{f}$ nicht.

(ii) Der Laplace-Operator ist für reellwertige Funktionen $g : D \to \mathbb{R}$ definiert und liefert wieder eine reellwertige Funktion $\Delta g : D \to \mathbb{R}$. Darauf wiederum können wir den $\mathbf{grad}$-Operator anwenden. Also ist $\mathbf{grad}\,(\Delta g)(\boldsymbol{x})$ definiert und liefert für jedes $x \in D$ einen Vektor in $\mathbb{R}^3$.

(iii) Für das Vektorfeld f existiert die Divergenz $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$. Allerdings ist durch $\operatorname{div} \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion gegeben, auf die wir den $\mathbf{rot}$-Operator *nicht* anwenden können.

(iv) Wie in (iii) ist durch $\operatorname{div} \boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion gegeben, so dass wir den Laplace-Operator auf $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ anwenden können. Für jedes $x \in D$ ist $\Delta (\operatorname{div} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$ eine reelle Zahl.

(b) Wir erinnern zunächst daran, dass für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $\varphi : D \to \mathbb{R}$ nach dem *Vertauschungssatz von Schwarz* gilt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Dies wenden wir im Folgenden komponentenweise an.

Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} (\mathbf{rot}\, \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right) \\
&= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\mathbf{rot}\, (\nabla g)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial g}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial g}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen zunächst (wieder unter Berücksichtigung des Vertauschungssatzes von Schwarz):

$$\begin{aligned}
\nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) &= \nabla \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Setzen wir

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f})\,(\boldsymbol{x}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial r_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial r_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial r_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_3}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Aus (1) und (2) ergibt sich also

$$
\nabla(\operatorname{div}\,\boldsymbol{f})(\,\boldsymbol{x}\,) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot}\;\boldsymbol{f}\,)(\,\boldsymbol{x}\,) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta f_1(\boldsymbol{x}) \\ \Delta f_2(\boldsymbol{x}) \\ \Delta f_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.
$$

Abgabe: 15.-19.04.24