Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 4u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

Tipp für die Integration: $\sin(\alpha x)\sin(\gamma x) = \cos(\alpha x - \gamma x) - \cos(\alpha x + \gamma x)$.

b) Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x), \qquad && x \in (0,\, 2),\ t > 0, \\ u(x,0) &= 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x), && x \in [0,2], \\ u(0,t) &= 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randwerte auf folgendes Problem für eine geeignet definierte Funktion v führt:

$$\begin{aligned} v_t - 2v_{xx} &= \sin(2\pi x), \qquad && x \in (0,\, 2),\ t > 0, \\ v(x,0) &= 3\sin(3\pi x), && x \in [0,2], \\ v(0,t) &= v(2,t) = 0, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil i).

Aufgabe 2: Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 3\sin(2\pi x)\cdot e^{-2t} \qquad && x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) = \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x) && x \in [0,1], \\ u_t(x,0) &= v_0(x) = 0 && x \in [0,1], \\ u(0,t) &= 0 && t > 0, \\ u(1,t) &= 0 && t > 0, \end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin(k\omega x), \qquad \omega = \frac{\pi}{1}$$

in die Differentialgleichung ein. Sie erhalten gewöhnliche Differentialgleichungen für die q_k. Die Anfangsbedingungen liefern die Anfangsdaten für die q_k.

Abgabe: 01.07.- 05.07.2024