Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Lösen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes die folgende Dirichlet Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten auf der Kreisscheibe $r^2 = x^2 + y^2 \leq 9$.

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} &= 0 \qquad && 0 \leq r < 3 \\ u(3, \varphi) &= \cos^2(\varphi) \qquad && \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tipps:

Verwenden Sie für die Lösung der Eulerschen Differentialgleichung
$r^2 \cdot g''(r) + ar \cdot g'(r) + b \cdot g(r) = 0$ den Ansatz $g(r) = r^k$.
Es gilt: $\cos^2(\varphi) = \dfrac{1}{2}\,(1 + \cos(2\varphi)\,)$.

Aufgabe 2:

Es sei $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein kubisches Polynom der Form

$$\begin{aligned} P(x,y) \; &= a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 \\ &+ b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 \\ &+ c_1 x + c_2 y + d, \end{aligned}$$

mit $a_i, b_j, c_k, d \in \mathbb{R}$. Bestimme alle Koeffizienten, für die P harmonisch auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3:

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit zusammenhängendem Rand ∂U, sowie $g : \partial U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei u eine auf dem Abschluss $\overline{U}$ stetige Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad U, \\ u = g & \text{auf} \quad \partial U. \end{cases}$$

Zeige: Falls g keine Nullstellen hat, so hat auch u keine Nullstellen.

(b) Seien

$$V = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}, \qquad \Gamma = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dann hat das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad V, \\ u = 0 & \text{auf} \quad \Gamma, \end{cases}$$

die beiden Lösungen

$$u_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad u_2(x,y) = \Phi(|(x,y)|),$$

wobei Φ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung bezeichnet.

Warum widerspricht dies *nicht* dem Satz über die Eindeutigkeit der Lösung (Korollar 2 auf Seite 70 der Vorlesung)?

(c) Seien

$$W_1 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x+2)^2 + y^2 < 1\}, \qquad W_2 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-2)^2 + y^2 < 1\},$$

sowie $W = W_1 \cup W_2$. Dann ist die Funktion

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x,y)^\top \in \overline{W_1}, \\ 2 & \text{für } (x,y)^\top \in \overline{W_2}. \end{cases}$$

harmonisch auf W, nicht konstant, und nimmt sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum auch im Inneren von W an. Warum widerspricht dies *nicht* dem starken Maximumsprinzip?

Bearbeitung: 17.06.-21.06.2024