Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

(a) Sei

$$\Omega_2 = \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < x^2+y^2 < 4\}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_2, \\ u(x,y) = 1 & \text{für} & x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) = 3 & \text{für} & x^2+y^2 = 4. \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?

(b) Sei

$$\Omega_3 = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \;:\; 1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} & \Omega_3, \\ u(x,y,z) = 1 & \text{für} & x^2+y^2+z^2 = 1, \\ u(x,y,z) = 3 & \text{für} & x^2+y^2+z^2 = 4. \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 2:

Gesucht sei eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta v(x,y) = 0$ in einem rotationssymmetrischen Gebiet, zum Beispiel in einem Kreisring. Das Gebiet lässt sich dann mittels Polarkoordinaten besser beschreiben. Man geht dafür über zu

$x = r\cos\phi\,,\ y = r\sin\phi$, und

$v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi)\ .$

Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ folgende Äquivalenz gilt:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \iff r^2\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \;=\; 0\,.$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9,\\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1,\\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9.\end{aligned}$$

Abgabe: 17.06.-21.06.2024