Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:
Gesucht ist eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_t + (u+2)u_x &= 0 \qquad x \in \mathbb{R},\\
u(x,0) &= \frac{1-x}{2} \qquad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

für $0 < t < t^*$ mit einem hinreichend kleinen t^*.

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) In welchen Intervallen $]0, t^*[$ ist die Lösung aus a) definiert?

c) Sind die Charakteristischen Kurven Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Skizzieren Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_0, 0)$ mit $x_0 = -2, -1, 0$.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die physikalisch sinnvolle schwache Lösung $u(x,t)$ der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zu den Anfangswerten

$$
u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1 & 0 < x \le 1, \\ 2 & 1 < x. \end{cases}
$$

b) Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$
u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+
$$

$$
u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \le 0, \\ 1 & 0 < x \le 2, \\ 0 & 2 < x. \end{cases}
$$

(i) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}\,]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.

(ii) Bis zu welchem t* ist die in (i) bestimmte Formel sinnvoll?

(iii) Geben Sie eine schwache Lösung für alle $t > 0$ an.

Aufgabe 3)

Gegeben ist die Erhaltungsgleichung $u_t + \left(\frac{u^4}{16}\right)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ .$

a) Sind die Charakteristiken $(x(t), t)$ Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben seien die Anfangsdaten $u(x,0) = 2 + \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Charakteristik durch den Punkt $(0,0)$.

c) Prüfen Sie, welche der unten angegebenen Funktionen $u^*, \tilde{u}, \hat{u}$ eine schwache Lösung zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist.

$$u^*(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{2}t\,. \end{cases} \qquad \tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq \frac{15}{16}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{15}{16}t\,. \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 - \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x \leq t, \\ 1 & \text{für } x > t\,. \end{cases}$$

Bearbeitung: 03.06.-07.06.2024