Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie physikalisch sinnvolle Lösungen der Differentialgleichung

$$u_t + \left(F(u)\right)_x = 0$$

mit der Flussfunktion $F(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$ und den Anfangsbedingungen

a) $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x, \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 2 & 0 < x. \end{cases}$

Hinweis: Gefragt sind nur Lösungen für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die physikalisch sinnvolle schwache Lösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1, \\ 0 & 1 < x. \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$.

Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

Bestimmen Sie die Lösung für $t > 2$.

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 2 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x,t) =$ Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t) =$ Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t) = v(x,t)u(x,t) =$ Fluss im Punkt x zum Zeitpunkt t

$\qquad =$ Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

Wir verfeinern unser Modell aus Blatt 2, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

einführen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x,t)) = v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right)$$

a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.

b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

c) Bestimmen Sie eine schwache Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangsdaten

$$v_{max} = 1 \quad \text{(Hier ist geeignet skaliert worden!)}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = \frac{u_{max}}{2} & x \le 0 \quad \text{(normaler Verkehr)}, \\ u_m = u_{max} & 0 < x \le 1 \quad \text{(rote Ampel/ Stau)}, \\ u_r = 0 & x > 1 \quad \text{(leere Strasse)} \end{cases}$$

für $t \in (0,2)$.

d) Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen und bei $u_l < u_r$ eine Verdünnungswelle eingefügt.

Sind hier für $u_l < u_r$ Verdünnungswellen möglich?

Bleiben Stoßwellen nur für $u_l > u_r$ physikalisch sinnvoll?

Hier müssen offensichtlich andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern.

Abgabetermine: 03.06.-07.06.2024