

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t + 4t u_x &= 3, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \sin(2x) & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen.
- Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$:

$$\begin{aligned}u_t + \frac{1}{2} u_x &= -4u, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \frac{2 \sin(x)}{1+x^2} & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (Nur für die sehr schnellen Rechner)

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t + 3u \cdot u_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+ \\u(x, 0) &= \begin{cases} 0 & \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \forall x > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

- Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem auf.
- Sind die Charakteristiken Geraden?
- Zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x_k, 0) := (k, 0)$ für $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Geben Sie an, welche Werte die Lösung, die Sie durch die Methode der Charakteristiken erhalten, entlang dieser Charakteristiken annimmt.
- Können Sie mit Hilfe der Teile a)- c) die Werte von $u(x, t)$ in den Punkten $(-1, 2)$, $(1, 2)$ und $(3, 2)$ angeben?

Bearbeitungstermine: 13.05.-17.05.2024