

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t - \sin(t) u_x &= \cos(t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, 0) &= \exp(-x^2) & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

- Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und bestimmen Sie deren allgemeine Lösungen.
- Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t + 3u_x + y^2 u_y &= 0, & x, y \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+, \\u(x, y, 0) &= \frac{\cos(x)}{1+y^2} & x, y \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x, t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

A) $u_t + 20 u_x = 21u$.

B) $u_t + 20u u_x = 21$.

C) $u_t - 5u^2 u_x = 0$.

D) $u_t + 5(x+1) u_x = 0$.

versehen mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A, B, C, D gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und/oder ii)?

- Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken.
- Die Charakteristiken sind Geraden.

Begründen Sie Ihre Antworten. Beachten Sie, dass Sie keine Lösungen berechnen müssen!

Abgabe: 13.05.-17.05.2024