**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt
Dr. H. P. Kiani, Dr. C. Goetz

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 2, Präsenzaufgaben

**Aufgabe 1:**

(a) Sei $a \neq 0$ eine gegebene Konstante und $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass durch

$$u(t,x) = u_0(x - at)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + a\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben ist.

(b) Finde Lösungen $u$ und $v$ der folgenden Anfangswertprobleme:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = e^{-x^2}, & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = \sin(\pi x), & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Zeige, dass durch $w = u + v$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0,x) = e^{-x^2} + \sin(\pi x), & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben ist.

**Aufgabe 2:**

(a) Zeige, dass durch

$$u(t,x) = \frac{x}{t+1} \qquad \text{und} \qquad v(t,x) = 1 \qquad \text{für} \qquad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$$

jeweils Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + u(t,x)\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x, & \text{für} \qquad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x) + v(t,x)\dfrac{\partial v}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) = 1, & \text{für} \qquad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gegeben sind.

(b) Zeige, dass $w = u + v$ mit $u$ und $v$ aus Teil (a) *keine* Lösung von

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x) + w(t,x)\dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x) = 0, & \text{für} \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ w(0,x) = x + 1, & \text{für} \qquad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ist. Was ist der wesentliche Unterschied zwischen der hier betrachteten Differentialgleichung und der Differentialgleichung in Aufgabe 1?

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} &= 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \cos(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= -4\sin(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution $\alpha = x + t,\ \mu = x - 2t$.

**Bearbeitung: 29.04-03.05.2024**