

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung Analysis II)

Für die Ableitung Parameterabhängiger Integrale gilt bei hinreichender Glattheit von f die **Leibniz-Regel** :

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt + b'(x) f(x, b(x)) - a'(x) f(x, a(x))$$

Gegeben Sei die Funktion

$$F(x) := \int_{-x}^{x^2} e^{xt} dt.$$

- a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F(x)$ indem Sie
- (i) erst nach t integrieren und anschließend nach x ableiten,
 - (ii) erst nach x ableiten und anschließend nach t integrieren.
- b) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$.

Aufgabe 2:

In dieser Aufgabe wollen wir uns zur Wiederholung mit den *Differentialoperatoren*

$$\text{div}, \quad \text{grad}, \quad \text{rot}, \quad \Delta, \quad \nabla$$

beschäftigen, die wir in der Analysis III kennengelernt haben.

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in D$. Wir betrachten Funktionen

- $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))^\top$,
- $g : D \rightarrow \mathbb{R}$,

Dabei seien \mathbf{f} und g jeweils \mathcal{C}^3 -Funktionen.

(a) Geben Sie an, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind. Geben Sie für die definierten Ausdrücke an, ob sie Vektoren in \mathbb{R}^3 oder Zahlen in \mathbb{R} sind.

(i) $\operatorname{div}(\mathbf{grad} f)(\mathbf{x})$,

(ii) $\mathbf{grad}(\Delta g)(\mathbf{x})$,

(iii) $\mathbf{rot}(\operatorname{div} \mathbf{f})(\mathbf{x})$,

(iv) $\Delta(\operatorname{div} \mathbf{f})(\mathbf{x})$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot} f)(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{rot}(\nabla g)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\nabla(\operatorname{div} \mathbf{f})(\mathbf{x}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Delta f_1(\mathbf{x}) \\ \Delta f_2(\mathbf{x}) \\ \Delta f_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Abgabe: 15.-19.04.24