Hörsaalübung zu Blatt 6 Differentialgleichungen II
Produktansätze für
Wärmeleitungs- und Wellengleichung

Die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

Ziel ist die Lösung von:

$$
\begin{aligned}
u_t - cu_{xx} &= h(x,t) \qquad && c > 0,\ t > 0,\ x \in (a,b) \text{ bei uns } (0,L) \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (a,b), \\
u(a,t) &= f(t) && t > 0, \\
u(b,t) &= g(t) && t > 0,
\end{aligned}
$$

c : Wärmeleitfähigkeit / Diffusionskoeffizient

Zunächst lösen wir für:

homogene DGL, homogene Randwerte, inhomogene Anfangswerte

$$
\begin{aligned}
&\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0 && c > 0,\ t > 0,\ x \in]0, L[,\ L > 0, \\
&\tilde{v}(x, 0) = v_0(x) && x \in (0, L) \\
&\tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(L, t) = 0 && t > 0\,.
\end{aligned}
$$

v_0 nicht identisch Null, d.h

Produktansatz: $\tilde{v}(x, t) = \; q(t) \cdot p(x)$

Einsetzen in DGL:

$$\dot{q}(t) \cdot p(x) \; - \; c \cdot q(t) \cdot p''(x) \; = \; 0$$

Umsortierung ergibt:

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} \; = \; c\,\frac{p''(x)}{p(x)} \; =$$

Zunächst: $p''(x) = -\lambda \cdot p(x)$

$\lambda = 0$: lineare Funktion

$\lambda < 0$: reelle exp-Funktionen

$\lambda > 0$: Cosinus- und Sinus-Funktionen

Randwerte:

$\tilde{v}(0,t) = q(t) \cdot p(0) \stackrel{!}{=} 0 \implies p(0) =$

$\tilde{v}(L,t) = q(t) \cdot p(L) \stackrel{!}{=} 0 \implies p(L) =$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur (vgl. Aufgabe 1 Präsenzblatt 1) für die passenden Sinusfunktionen

$\sin(0) = 0$ und $\sin(L) = 0 \implies \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Da wir nichttriviale Lösungen suchen und unten Linearkombinationen von Lösungen betrachten, genügt $n \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten also

$$\boxed{p_n(x) = \sin(n\omega x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n \in \mathbb{N}, \omega = \frac{\pi}{L}}$$

mit den zugehörigen

$$\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = n^2\omega^2}$$

Mit diesen $\lambda-$Werten lösen wir die zweite DGL

$$\frac{\dot{q}_n(t)}{q_n(t)} = c\,\frac{p_n''(x)}{p_n(x)} = -c \cdot \lambda_n \iff \dot{q}_n(t) = -c\lambda_n q_n(t)$$

$$\boxed{q_n(t) = e^{-c\lambda_n t} = e^{-c\omega^2 n^2 t}}$$

Jede Funktion $\boxed{\tilde{v}_n(t) = p_n(x) \cdot q_n(t) = \sin(n\omega x)\, e^{-c\omega^2 n^2 t}}$

erfüllt die homogene Differentialgleichung und die homogenen Randwerte!

Jede Linearkombination $\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m$

erfüllt die homogene Differentialgleichung und die homogenen Randwerte!

Denn auf dem Rand:

$$(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)(0) = \alpha_n \cdot \tilde{v}_n(0) + \alpha_m \cdot \tilde{v}_m(0) =$$

$$(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)(L) = \alpha_n \cdot \tilde{v}_n(L) + \alpha_m \cdot \tilde{v}_m(L) =$$

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)_t - c\,(\alpha_n \tilde{v}_n + \alpha_m \tilde{v}_m)_{xx} \\ &= \alpha_n \cdot (\tilde{v}_n)_t + \alpha_m \cdot (\tilde{v}_m)_t - c\alpha_n(\tilde{v}_n)_{xx} - c\alpha_m(\tilde{v}_m)_{xx} \\ &= \alpha_n\left((\tilde{v}_n)_t - c(\tilde{v}_n)_{xx}\right) + \alpha_m\left((\tilde{v}_m)_t - c(\tilde{v}_m)_{xx}\right)\end{aligned}$$

(*Frage: Wären Linearkombis von Lösungen auch bei inhomogener Dgl und/oder inhomogenen Randwerten Lösungen?*)

Jede endliche Linearkombination

$$\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

löst die Differentialgleichung und erfüllt die Randbedingungen.

Ohne Diskussion der Konvergenz machen wir den Ansatz:

$$\boxed{\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

Zu erfüllen bleibt noch die Anfangsbedingung, die verlangt:

$$\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 \cdot 0} \sin(n\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x) \qquad\qquad x \in (0, L)$$

Also $$\boxed{\tilde{v}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sin(n\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x) \qquad\qquad x \in (0, L)}$$

IDEE:

Wähle: α_n als Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0:

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(n\omega x)\,dx.}$$

und erhalte damit

$$\boxed{\tilde{v}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-c\omega^2 n^2 t}\sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

als Lösung von

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_t - c\tilde{v}_{xx} = 0 && c>0,\ t>0,\ x\in(0,L)\\
&\tilde{v}(x,0) = v_0(x) && x\in(0,L)\\
&\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(L,t) = 0 && t>0\,.
\end{aligned}$$

Problem II) Inhomogene DGL, inhomogene Rand- und Anfangswerte

$$
\begin{aligned}
u_t - cu_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ t > 0,\ x \in (0,L) \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= f(t) && t > 0, \\
u(L,t) &= g(t) && t > 0,
\end{aligned}
$$

c : Wärmeleitfähigkeit / Diffusionskoeffizient

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x) && 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) && 0 < x < \pi\,, \\
u(0,t) &= \frac{1}{t+1} && t > 0, \\
u(\pi,t) &= 0 && t > 0.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) := u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t)) \right]$$

$$v(0,t) = u(0,t) - f(t) - \frac{0}{L}\,(g(t) - f(t))$$

$$v(L,t) = u(L,t) - f(t) - \frac{L}{L}\,(g(t) - f(t))$$

Neue DGL für v:

$$u(x,t) = v(x,t) + f(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

$$u_t(x,t) = v_t(x,t) + \dot{f}(t) + \frac{x}{L}\,(\dot{g}(t) - \dot{f}(t))$$

$$u_x(x,t) := v_x(x,t) + 0 + \frac{1}{L}\,(g(t) - f(t))$$

$u_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t)$

Neue DGL : $\quad v_t - cv_{xx} = h(x,t) - \dot{f}(t) - \frac{x}{L}\left(\dot{g}(t) - \dot{f}(t)\right) =: \tilde{h}(x,t)$

Neue Anfangswerte für: $v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$

$$v(x,0) = u(x,0) - f(0) - \frac{x}{L}\left(g(0) - f(0)\right) =: v_0(x).$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte, **homogene Randdaten**

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x) && 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) && 0 < x < \pi\,, \\
u(0,t) &= \frac{1}{t+1} && t > 0, \\
u(\pi,t) &= 0 && t > 0.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$
v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))
$$

Neue Aufgabe für $v(x,t) = u(x,t) + \dfrac{1}{t+1}\left(\dfrac{x}{\pi} - 1\right)$

DGL für u: $u_t - u_{xx} = \dfrac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x)$

$v_t(x,t) =$

$u_t - u_{xx} =$

$v_t - v_{xx} =$

$v(x,0) =$

$v(0,t) = u(0,t) - \dfrac{1}{t+1} =$

$v(\pi,t) = u(\pi,t) - \dfrac{1}{t+1}\left(1 - \dfrac{\pi}{\pi}\right) = 0.$

Schritt 2)

$$\begin{aligned} v_t - c\, v_{xx} &= \tilde{h}(x,t) \\ v(x,0) &= v_0(x) \\ v(0,t) &= v(L,t) = 0\,. \end{aligned}$$

homogene Randwerte werden erfüllt von: $\boxed{p_n(x) = \sin(n\omega x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

Wir machen den Ansatz: $\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\omega x)}$

Einsetzen in die DGL $v_t - cv_{xx} = \tilde{h}(x,t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t)]\sin(n\omega x) = \tilde{h}(x,t)$$

Setze $\tilde{h}$ ungerade $2L-$period. fort und berechne Fourier Reihe bzgl. x

$$F_{\tilde{h}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\omega x)$$

$$\boxed{c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{h}(x,t) \sin(n\omega x)\, dx}$$

Koeffizientenvergleich liefert für jedes a_n eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t)}$$

Die Lösung muss noch die Anfangswerte erfüllen

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin(n\omega x) = v_0(x)$$

Setze v_0 ungerade $2L-$period. fort und berechne Fourier Reihe

$$F_{v_0}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

Die $a_n(0)$ sind also die Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0:

$$\boxed{a_n(0) = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(n\omega x)\, dx}$$

Löse die Anfangswertaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t),\; a_n(0) = b_n}$$

und setze ein in den Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\omega x)$$

Schritt 3: Zusammensetzen zur Lösung des ursprünglichen Problems :

$$u(x,t) = v(x,t) \;+\; f(t) \;+\; \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

Zurück zu unserem Beispiel:)

$$v_t - v_{xx} = 4\sin(2x), \qquad x \in (0,\pi),\ t > 0$$

$$v(x,0) \ = \ \sin(6x) \qquad x \in [0,\pi]$$

$$v(0,t) \ = \ v(\pi,t) \ = \ 0, \qquad t \geq 0$$

Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\omega x)$$

Löse die Anfangswertaufgaben

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t),\ \ a_n(0) = b_n$$

b_n: Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0:

$$\sin(6x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$c_n(t)$: Fourier Koeff'n der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von $\tilde{h}(x,t)$:

$$\tilde{h}(x,t) = 4\sin(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(nx)$$

Löse:

$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t),\ a_n(0) = b_n$ mit $c = 1$ und $\omega = \frac{L}{\pi} = 1$

$n = 2$:

$$\dot{a}_2(t) + 2^2 a_2(t) = c_2(t) = 4,\ a_2(0) = b_2 = 0$$

$n = 6$:

$$\dot{a}_6(t) + 6^2 a_6(t) = \; c_6(t) \; = \; 0, \; a_6(0) = \; b_6 \; = 1$$

$n \notin \{2, 6\}$

$$\dot{a}_n(t) + n^2 \; a_n(t) = \; c_n(t) \; = \; 0, \; a_n(0) = \; b_n \; = 0$$

Lösung: $v(x,t) =$

$$u(x,t) = v(x,t) + f(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

mit $f(t) = \frac{1}{1+t}$, $g(t) = 0$, $L = \pi$.

Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

zunächst : **homogene** Dgl. mit homogenen Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Produktansatz $u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$ liefert

$$p(x) \cdot \ddot{q}(t) = c^2 p''(x) \cdot q(t)$$

$$\frac{p''}{p} = \frac{\ddot{q}}{c^2 q} = -\lambda$$

$p'' = -\lambda p$ und $\ddot{q} = -\lambda c^2 q$

Homogene Randbedingungen

$u(0,t) = p(0)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(0) = 0 \vee q \equiv 0$

$u(L,t) = p(L)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(L) = 0 \vee q \equiv 0$

RWA wie oben:

$$p''(x) = -\lambda p(x), \qquad p(0) = p(L) = 0$$

Nichttriviale Lösungen gibt es wieder nur für $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2, k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{p_k(x) = \sin(k\omega x) \qquad \omega = \pi/L, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\omega)^2, \quad k \in \mathbb{N}}$$

Zweite Differentialgleichung

$\ddot{q} = -\lambda c^2 q = -(ck\omega)^2 q \qquad$ liefert

$$q_k(t) = A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)$$

$$u_k(x,t) := q_k(t) \cdot p_k(x), \qquad k \in \mathbb{N} \text{ löst DGL + erfüllt Randbedingungen.}$$

DGL homogen und linear, RB'n homogen $\longrightarrow$ Superposition erlaubt

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)}$$

löst DGL + RB'n.

Zu erfüllen sind mit $u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$

die Anfangsbedingungen.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(0) + B_k \sin(0)\right) \cdot \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0,L]$$

Für $n \to \infty$ erhält man

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0, L]$$

Die A_k sind bei glatten Anfangswerten die Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von u_0

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha$$

Die zweite lautet für

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$$

$$u_t(x,t) =$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega) \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x)$$

mit den Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$period. Fortsetzung von v_0

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) \, d\alpha$$

muss also gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{ck\pi}{L} \sin(\frac{k\pi}{L}x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

oder $\qquad B_k = \frac{1}{ck\omega} b_k = \frac{L}{ck\pi} b_k$

Damit erhalten wir die Lösung von

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x, 0) &= u_0(x) && x \in (0, L), \\
u_t(x, 0) &= v_0(x) && x \in (0, L), \\
u(0, t) &= 0 && t > 0, \\
u(L, t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}
$$

$$
\boxed{A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha, \qquad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha}
$$

Inhomogene Randwerte : Homogenisierung der Randwerte

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in [0, L], \\
u_t(x,0) &= w_0(x) && x \in [0, L], \\
u(0,t) &= f(t) && t \geq 0, \\
u(L,t) &= g(t) && t \geq 0,
\end{aligned}$$

Homogenisieren wie oben:

$$v(x,t) := u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x}{L} (g(t) - f(t)) \right]$$

Führt zu $v(0,t) = v(L,t) = 0$.

Neue DGL für v:

$$u(x,t) := v(x,t) + \left[f(t) + \frac{x}{L} (g(t) - f(t)) \right]$$

$$u_{tt}(x,t) =$$

$$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte aber **homogene Randdaten**

$$v_{tt} + \left[\ddot{f}(t) + \frac{x}{L}\left(\ddot{g}(t) - \ddot{f}(t)\right)\right] - c^2 v_{xx} = 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \left[f(0) + \frac{x}{L}\left(g(0) - f(0)\right)\right] =: v_0(x).$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - \left[\dot{f}(0) + \frac{x}{L}\left(\dot{g}(0) - \dot{f}(0)\right)\right] =: \hat{v}_0(x).$$

$$v(0,t) = 0\,, \qquad v(L,t) = 0\,.$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx} & \quad & 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 2x - x^2 & & 0 \le x \le 1\,, \\
u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) & & 0 \le x \le 1\,, \\
u(0,t) &= 0 & & t \ge 0\,, \\
u(1,t) &= 1 & & t \ge 0\,.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Homogenisierung der Randwerte:

$$
v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))
$$

$$
= u(x,t) - 0 - \frac{x}{1}\,(1-0) = u(x,t) - x\,\cdot
$$

$v_{xx} =$ $\qquad$ $v_{tt} =$

Schritt 2) Neue Aufgabe:

$$\begin{aligned} v_{tt} - \; 4v_{xx} \;&=\; 0 && 0 < x < 1,\; t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) = \; u(x,0) - x \;&=\; x - x^2 && 0 \le x \le 1\,, \\ v_t(x,0) = \; u_t(x,0) \;&=\; \sin(2\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\ v(0,t) \;=\; u(0,t) - 0 &=\; 0 && t \ge 0\,, \\ v(1,t) \;=\; u(1,t) - 1 &=\; 0 && t \ge 0\,. \end{aligned}$$

Schritt 3) Lösung der homogenen Aufgabe:

Mit $c = 2, \quad L = 1$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(\frac{ck\pi}{L}\,t) \;+\; B_k \sin(\frac{ck\pi}{L}\,t) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}\,x)$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(0) \;+\; B_k \sin(0) \,\right] \sin(\frac{k\pi}{L}\,x), \qquad L = 1.$$

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \stackrel{!}{=} x - x^2 \qquad\qquad \forall x \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(k\pi x\right)\, dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) \sin\left(k\pi x\right)\, dx \\
&= 2 \left(\left[(x - x^2) \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 (1 - 2x) \frac{-\cos(k\pi x)}{k\pi}\, dx \right) \\
&= \frac{2}{k\pi} \int_0^1 (1 - 2x) \cos(k\pi x) dx \\
&= \frac{2}{k\pi} \left(\left[(1 - 2x) \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \right]_0^1 - \int_0^1 (-2) \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\, dx \right) \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2} \left(-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi} \right)_0^1 = \frac{4}{k^3\pi^3} \left((1 - (-1)^k \right) .
\end{aligned}$$

Zweite Anfangsbedingung

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(2k\pi t) \;+\; B_k \sin(2k\pi t)\right] \sin(k\pi x)$$

$$v_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-2k\pi A_k \sin(2k\pi\, t) \;+\; 2k\pi B_k \cos(2k\pi\, t)\right] \sin(k\pi x)$$

$$v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-2k\pi A_k \sin(0) \;+\; 2k\pi B_k \cos(0)\right] \sin(k\pi x) \overset{!}{=} \sin(2\pi x)$$

Also

$$B_k =$$

und damit

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(2k\pi t) + B_k \sin(2k\pi t)\right] \sin(k\pi x)$$

$$=$$

Die Lösung der ursprünglichen RWA lautet

$u(x,t) = v(x,t) + x = x +$

Inhomogene Differentialgleichung, homogene Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}
$$

Einsetzen in die Differentialgleichungführt bei glm. Konvergenz der Reihen auf:

$$\ddot{q}_k(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) \;=\; c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\; q_k'(0) = b_k$$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L u_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!