Hörsaalübung zu Blatt 5 Differentialgleichungen II
Harmonische Funktionen
Laplace und Poisson Gleichung

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Laplace Gleichung, harmonische Funktionen

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=i}^{n} u_{x_i x_i}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega}$$

Beispiel 1: (vgl. PA2)
Für welche $k \in \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u in ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \overset{!}{=} 0 \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2}$$

a) $u(x, y) := (x + k \cdot y)^2 \qquad k \in \mathbb{R}$

$$u_x = 2\,(x + k \cdot y), \qquad u_y = 2k\,(x + k \cdot y)$$

$$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = 2k^2, \qquad \Delta u = 2 + 2k^2$$

b) $u(x,y) := \cos(2x) \cdot g(y)$

$u_x = -2\sin(2x) \cdot g(y), \qquad u_y = \cos(2x) \cdot g'(y)$

$u_{xx} = -4\cos(2x) \cdot g(y), \qquad u_{yy} = \cos(2x) \cdot g''(y)$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \cos(2x)\,(g''(y) - 4g(y)) \overset{!}{=} 0$

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft:

Sei u harmonisch im Kreis $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf dem Rand des Kreises $\partial B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(x_0,y_0)} u(x, y)ds}$$

Maximumprinzip:

Eine in Ω (wie oben) harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

Eindeutigkeit der Lösung

Poissonsche Integralformel: Für die Lösung von

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x, y) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$u(x, y) = \frac{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{2\pi R} \int_{\|z - \binom{x_0}{y_0}\| = R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{z} - \binom{x}{y}\|^2} \, d\boldsymbol{z}$$

Fundamentallösungen:

$n = 2:$ $\qquad \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln(\|\boldsymbol{x}\|_2)$

$n > 2:$ $\qquad \Phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\alpha_n (n-2) n} (\|\boldsymbol{x}\|_2^{2-n})$, $\alpha_n =$ Volumen der Einheitskugel

$n = 2:$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

$n = 3$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{\alpha_3 (3 - 2) \cdot 3} (\|\boldsymbol{x}\|_2^{2-3}) = -\frac{1}{4\pi} |(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})|^{-1}.$$

Rotationssymmetrische Lösungen

Nach Vorlesung Seite 66 lässt sich jede rotationssymmetrische harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Fundamentallösung $\Phi(\boldsymbol{x})$ in Form von

$$u(\boldsymbol{x}) = a\Phi(\boldsymbol{x}) + b, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}$$

darstellen.

Beispiel 2: (vgl. PA3)

Gesucht ist der Wert $u(1,2)^T$ der C^2 Funktion mit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 < 9,$$

mit

A) $u(x,y) = 2024 \qquad \text{für} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Variante 1) Die Lösung ist eindeutig.

$u(x,y) =$

löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe,

Also $u(1,2) =$

Variante 2) $u(x,y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω.

Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$ werden auf dem Rand angenommen.

Also $u(1,2) =$

B) $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2024 \qquad$ für $\quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9.$

Da die Lösung unseres Problems eindeutig ist, haben wir wegen

$$(x^2 - y^2 + 2024)_{xx} + (x^2 - y^2 + 2024)_{yy} = 2 - 2 = 0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

die Lösung bereits vorliegen:

$u(x,y) =$

$u(1,2) =$

Laplace Gleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Im **rotationssymmetrischem** Fall: Gebiet und Daten rotationssymmetrisch

Fundamentallösungen im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ nutzen!

Beispiel 3: (vgl. HA1)

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= 0 \quad \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ v(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1, \\ v(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Setze $v(x,y) = u(r,\phi) = w(r)$

Hieraus erhalten wir mit der Fundamentallösung

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln(\|(x,y)\|_2), \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

die Lösungen

$$v(x,y) = a\Phi(x,y) + b.$$

bzw.

$$u(r,\phi) = w(r) = \frac{a}{2\pi}\ln(r) + d = c\ln(r) + d.$$

Die Randwerte liefern

$$\begin{aligned}
u(1,\phi) =& 1 \implies c\ln(1) + d = 1 \implies \qquad d = 1.\\
u(2,\phi) =& 2 \implies c\ln(2) + 1 = 2 \implies c = \frac{1}{\ln(2)}.\\
u(r,\phi) =& \frac{1}{\ln(2)}\ln(r) + 1.\\
v(x,y) =& \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2}}{\ln(2)} + 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 4: (vgl. HA3)

Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe für die Poisson-Gleichung

$$\Delta v = -\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 25,$$
$$v(x,y) = 0 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1,$$
$$v(x,y) = 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 25.$$

Nach HA2 gilt mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, und

$u(r,\phi) := v(x(r,\phi), y(r,\phi))$

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \iff r^2\,(v_{xx} + v_{yy}) \;=\; 0\,. \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Für rotationssymmetrische Lösungen mit $u(r,\phi) = \tilde{u}(r)$ ist also zu lösen:

$r^2\tilde{u}'' + r\tilde{u}' = r^2(-\frac{1}{r^3}) \overset{r\neq 0}{\iff} \tilde{u}'' + \frac{1}{r}\tilde{u}' = -\frac{1}{r^3}.$

Setze $w := \tilde{u}'$:

$$w' + \frac{1}{r}w = -\frac{1}{r^3} \implies \frac{dw_h}{w_h} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow w_h = \frac{\alpha}{r}.$$

$$w_p := \frac{\alpha(r)}{r} \implies \frac{\alpha'(r)}{r} = -\frac{1}{r^3} \implies \alpha'(r) = -\frac{1}{r^2} \implies \alpha(r) = \frac{1}{r} + \hat{c}.$$

Mit der Wahl $\alpha(r) = \frac{1}{r}$ und damit $w_p(r) = \frac{1}{r^2}$ folgt

$$\implies w(r) = w_h + w_p = \frac{\alpha}{r} + \frac{1}{r^2} \implies \tilde{u}(r) = \alpha \ln(r) - \frac{1}{r} + c$$

$$v(x,y) = \alpha \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + c.$$

Randdaten:

$v(x,y) = 0$ für $x^2 + y^2 = 1$

$$v(x,y) = \alpha \ln{(1)} - \frac{1}{\sqrt{1}} + c = c - 1 \stackrel{!}{=} 0.$$

$v(x,y) = 1$ für $x^2 + y^2 = 25$:

$$v(x,y) = \alpha \ln{(5)} - \frac{1}{5} + 1 \stackrel{!}{=} 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{5\ln(5)}.$$

$$v(x,y) = \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{5\ln(5)} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1.$$

Bei nicht rotationssymmetrischen Daten: (vgl. PA1)

Ansatz: $u(r,\phi) = w(r) \cdot v(\phi)$

Zu erfüllen: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0\,.$

Neue Dgl.: $r^2 w'' \cdot v + r w' \cdot v + w \cdot v'' = 0$

Sortieren nach v und w: $v(r^2 w'' + r w') = -w \cdot v''$

$$\Longrightarrow \frac{r^2 w'' + r w'}{w} = -\frac{v''}{v} = \lambda.$$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$\boxed{v''(\phi) = -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda w = 0}$$

Zunächst $v''(\phi) = -\lambda v(\phi)$: Lösungen sind (siehe oben bzw. Blatt 1H)

$\lambda = 0$: lineare Funktion

$\lambda < 0$: reelle exp-Funktionen

$\lambda > 0$: Cosinus- und Sinus-Funktionen

v sollte $2\pi-$periodisch sein, daher kommen nur in Frage $\cos(k\phi)$, $\sin(k\phi)$

mit zugehörigen $\lambda_k = k^2$ und

$$\boxed{v_k(\phi) = a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

Gleichung für die passenden w_k lautet

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda_k w = r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$$

$\underline{k = 0:}$ $\qquad r^2 w''(r) + r w'(r) = 0, \qquad g = w'$

$$r g'(r) + g(r) = 0 \iff r \cdot \frac{dg}{dr} = -g \iff \frac{dg}{g} = -\frac{dr}{r}$$

$$w' = g = \frac{d_0}{r} \implies \boxed{w_0 = c_0 + d_0 \ln(r)\,.}$$

$\underline{k \neq 0:}$ Eulersche Dgl.: Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0 \iff$$

$$r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} - k^2 \cdot r^\gamma = 0$$

$$\iff r^\gamma \left(\gamma^2 - \gamma + \gamma - k^2\right) = 0 \iff \gamma = \pm k$$

und damit $\boxed{w_k(r) = c_k r^{-k} + d_k r^k}$

Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL.

Da die Dgl linear ist, ist Jede Linear Kombination auch eine Lösung

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \ + \sum_{k=1}^{n} (c_k r^{-k} \ + \ d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \ + \ b_k \sin(k\phi))$$

Ohne Diskussion der Konvergenz, schreiben wir

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \ + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} \ + \ d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \ + \ b_k \sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden. Siehe unten.

Beispiel:
$\Delta u = 0$, für $x^2 + y^2 > 16$, $\qquad v(x,y) = 1 + xy - 2y^2$, auf $x^2 + y^2 = 16$.

Allgemeine Lösung:

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

Vorgehensweise auf dem Außenraum $x^2 + y^2 > R^2$ **:**

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k$.

Es bleibt:

Ansatz : $u(r,\phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} \, (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung

Hier $v(x,y) = 1 - xy - 2y^2$ auf Rand

Polar

$u(4,\phi) =$

Im Allg.: $u(R,\phi) \stackrel{!}{=} u_R(\phi)$,

Bestimme a_k, b_k, so dass

$$u(R,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \left(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)\right) = u_R(\phi)$$

Entwickle u_R in eine Fourier-Reihe

$$u_R(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) \, + \, B_k \sin(k\phi)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_R(\phi) \cos(k\phi) \, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_R(\phi) \sin(k\phi) \, d\phi$$

Koeffizientenvergleich:

$$R^{-k} a_k = A_k \iff a_k = R^k \cdot A_k, \quad \text{und analog } b_k = R^k \cdot B_k$$

und wir erhalten die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) \, + \, B_k \sin(k\phi)\right)$$

Zurück zum Beispiel:

zu erfüllen ist die RB: $v(x,y) = 1 + xy - 2y^2,$ auf $x^2 + y^2 = 16$

Mit $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $r^2 = x^2 + y^2$ also

$$u(4,\phi) = 1 + 4\cos(\phi)\cdot 4\sin(\phi) - 32\sin^2(\phi) = u_R(\phi)$$

Im Allg.: Fourier Koeffizienten A_k, B_k von $u_R(\phi)$ berechnen und einsetzen!

$$u(4,\phi) = u_R(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{4}\right)^k (A_k\cos(k\phi) + B_k\sin(k\phi))$$

Hier: $u_R(\phi) =$ Linearkombination von $\sin -/\cos -$ Potenzen:

$\Longrightarrow$ evtl. Koeffizientenvergleich möglich

$$u(4,\phi) = u_R(\phi) = 1 + 8 \cdot 2\cos(\phi)\cdot\sin(\phi) - 16\cdot 2\sin^2(\phi) \; = u_R(\phi)$$

$$\overset{!}{=} \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{4}\right)^k (A_k\cos(k\phi) \; + \; B_k\sin(k\phi))$$

Nutze $\sin(2\phi) = \; 2\cos(\phi)\cdot\sin(\phi), \qquad \cos(2\phi) = \; 1 - 2\sin^2(\phi)$

$$u(4,\phi) = u_R(\phi) = 1 + 8\sin(2\phi) - 16 + 16\cos(2\phi)$$

$$\overset{!}{=} \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos(k\phi) \; + \; B_k\sin(k\phi))$$

Die Fourierkoeffizienten von u_R sind

$\frac{A_0}{2} = -15\,, \quad A_2 = 16\,, \quad B_2 = 8, \qquad A_K = B_k = 0$ sonst.

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) = -15 + \left(\frac{4}{r}\right)^2 (16\cos(2\phi) + 8\sin(2\phi))$$

Falls Lösung in kartesischen Koordinaten gewünscht:

nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

und $\sin(2\phi) = 2\cos(\phi)\cdot\sin(\phi) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Zusammenfassung

Allgemeiner Ansatz bei Außen–/Innenraum eines Kreises, bei Ringen, bei Kreis-/ Ringsegmenten

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Um beschränkte Lösungen zu erhalten setzt man

- im **Innenraum** mit RWE $u(R,\phi) = u_R(\phi)$

  $c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ und $d_0 = 0$ und erhält:

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

- im **Außenraum** mit Randwerten $u(R,\phi) = u_R(\phi)$

  $d_k = 0$ und:

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi)\right)$$

- im **Ring** mit RWE $u(R_1,\phi) = u_1(\phi), \quad u(R_2,\phi) = u_2(\phi)$

  volle Ansatzfunktion.

  Koeffizienten über die zwei Randbedingungen bestimmen!

- im **(Ring-)Sektor**: Wenn auf mehr als einem Randstück Randdaten $\neq 0$ zerlegt man notfalls, wie beim Rechteck. Ansatzfunktionen müssen evtl. angepasst werden.

Tipp zur HA2: Mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, und

$u(r,\phi) := v(x(r,\phi), y(r,\phi))$

ist zu zeigen:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \iff r^2\,(v_{xx} + v_{yy}) \;=\; 0\,.$$

Berechne dazu mit Hilfe der (Kettenregel), ähnlich wie in Aufgabe 3, Präsenzblatt 2:

$$\begin{aligned} u_r &= \; v_x \cdot x_r + v_y \cdot y_r = \; \cos(\phi) v_x + \sin(\phi) v_y \\ u_\phi &= \\ u_{rr} &= \\ u_{\phi\phi} & \end{aligned}$$

Setze ein in

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0.$