Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 2 Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Linearität von Differentialgleichungen und eine einfache Transformation

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT! Die Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Linearität von Differentialgleichungen

Skalare Partielle Differentialgleichung (vgl. Vorlesung Seite 4-6)

$$F(\boldsymbol{x},\ \underset{}{\overset{\in \mathbb{R}}{u}}(\boldsymbol{x}),\ Du(\boldsymbol{x}),\ D^2u(\boldsymbol{x}), \ldots,\ D^m u(\boldsymbol{x})) = 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

o ff $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \end{pmatrix}$

m : Ordnung, wenn mindestens eine $m-$te Ableitung vorkommt.

$n \geq 2$: Dimension des $x-$raums

Linearität von Differentialgleichungen (vgl. Vorlesung Seite 8-9)

Lineare PDE: hängen affin linear von u, Du, $D^2u, \ldots,$ $D^m u$ ab. Nur von $\boldsymbol{x}$ abhängige Koeffizienten.

Semilineare PDE: hängen affin linear von $D^m u$ ab. Nur von $\boldsymbol{x}$ abhängige Koeffizienten der höchsten Ableitungen.

Quasilineare PDE: hängen affin linear von $D^m u$ ab. Die Koeffizienten der höchsten Ableitungen können von $u, Du, \ldots, D^{m-1}u$ abhängen.

Voll nichtlineare PDE: nicht quasilinear.

Beispiele:

und

- $au_x + bu_y = g(x,y)$ mit einer stetigen Funktion g, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \neq 0$.

gesucht $u(x,y)$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ordnung: 1

Koeffizienten: a, b

Inhomogenität: additiver, u-unabhängiger Term: $g(x,y)$

Linear? Ja: $(u_x)^1$, $(u_y)^1$, Koeffizienten nur von $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abhängig

- $x^2 u_t + t u_x = 0$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

gesucht $u(t,x)$.

Ordnung: 1

Koeffizienten: x^2, t

Inhomogenität: keine

Linear? Ja, Koeffizienten nur von $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ abhängig, $(u_t)^1$, $(u_x)^1$

- Telegraphengleichung: $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$

  Ordnung: 2

  Koeffizienten: 1, −1, 2, 1

  Inhomogenität: keine

  Linear? Ja

- $u_t + (u^4)_x = 0$ $\qquad u(t,x) \qquad (u^4)_x = 4u^3 \cdot u_x$

  $\longrightarrow u_t + \underline{\underline{4u^3}} \cdot u_x = 0$

  Lu-abh.

  Ordnung: 1

  Koeffizienten: $1, 4u^3$

  Inhomogenität: keine

  Linear? quasilinear

- $(u_{xx})^2 + u_{xy} + 2u_y = 0$ $\qquad u_{xx} \cdot u_{xx}$

  Ordnung: 2

  Linear? Nein

Beispiel zu H1: Prüfe für $x^2u_t + tu_x = 0$ bzw. $u_t + (u^4)_x = 0$ ob beliebige Vielfache von Lösungen wieder Lösungen sind.

Wenn ja, prüfen Sie, ob auch Summen von Lösungen wieder Lösungen sind.

- Es gelte $\tilde{u}_t + (\tilde{u}^4)_x = 0$ und $\tilde{u}(x,t)$ nicht konstant. $\Rightarrow \tilde{u}_x \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{u}_t \neq 0$

  Also $\tilde{u}_t + 4\tilde{u}^3 \cdot \tilde{u}_x = 0 \implies$ $4\tilde{u}^3 u_x = -\tilde{u}_t$

  Dann gilt für $\hat{u} := k \cdot \tilde{u}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

  $4\hat{u}^3 . u_x$

  Dgl: $\hat{u}_t + (\hat{u}^4)_x = (k \cdot \tilde{u})_t + 4(k\tilde{u})^3(k\tilde{u})_x =$ $k \cdot \tilde{u}_t + 4 \cdot k^3 \tilde{u}^3 \cdot k \tilde{u}_x$

  $= k\tilde{u}_t + k^3 . k \, (-\tilde{u}_t) = \tilde{u}_t \, (k - k^4) = \tilde{u}_t \cdot k \cdot (1 - k^3) \doteq 0$

  $\tilde{u}_t \neq 0$, $k \neq 0$ $\rightarrow k = 1$

  $\Rightarrow \hat{u} = \tilde{u}$ alte Lösung

- Es gelte $x^2\tilde{u}_t + t\tilde{u}_x = 0$ $\Rightarrow$ Vielfache von Lösungen sind i. A. keine Lösungen!

  Dann gilt für $\hat{u} := k \cdot \tilde{u}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\tilde{u} \not\equiv c$ was wieder bedeutet $\tilde{u}_t \neq 0$ und $\tilde{u}_x \neq 0$

  Dgl: $x^2\hat{u}_t + t\hat{u}_x = x^2(k\tilde{u})_t + t(k\tilde{u})_x =$

  $= x^2 . k . \tilde{u}_t + t k \tilde{u}_x = k \, (\underbrace{x^2\tilde{u}_t + k\tilde{u}_x}_{0}) = 0$

$\Rightarrow$ beliebige Vielfache von Lösungen der Dgl sind wieder Lösungen

Seien nun u^* und $\tilde{u}$ Lösungen der Differentialgleichung ,also

$$x^2\tilde{u}_t + t\tilde{u}_x = 0 \quad (2) \qquad \text{und} \qquad x^2 u_t^* + t\ u_x^* = 0. \quad (1)$$

Dann gilt für $\hat{u} := u^* + \tilde{u}$

Dgl $\quad x^2\hat{u}_t + t\hat{u}_x = x^2(u^* + \tilde{u})_t + t(u^* + \tilde{u})_x =$

$$= x^2(u^*_t + \tilde{u}_t) + t(u^*_x + \tilde{u}_x)$$

$$= x^2u^*_t + x^2\tilde{u}_t + tu^*_x + t\tilde{u}_x = 0 \checkmark$$

(1) 0 (2) 0

Was gilt dann für drei Lösungen?

Und für Linearkombinationen beliebig vieler Lösungen?

$u^{[1]}$ Lösung $\Longrightarrow c_1 u^{[1]}$ Lösung

$u^{[2]}$ Lösung $\Longrightarrow c_2 u^{[2]}$ Lösung

$\tilde{u} = c_1 u^{[1]} + c_2 u^{[2]}$ Lösung

$u^{[3]}$ Lösung $\Longrightarrow \hat{u} = c_3 u^{[3]}$ Lösung

$\tilde{u} + \hat{u}$ Lösung

Superposition: **(Beipiel zu P1, P2)**

Sei f eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass

z.B $\cos(\cdots)$, $e^{(\cdots)}$, Polynom in $(\cdots)$, etc.

$$u(t,x) = f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$$

eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung $x^2 u_t + t u_x = 0$ ist.

$$u_t(t,x) = \left(f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\right)_t = f'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)_t}_{-\frac{2t}{2}} = -t \cdot f'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$$

$$u_x(t,x) = \left(f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\right)_x = f'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\underbrace{\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)_x}_{\frac{3x^2}{3} = x^2} = x^2 f'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$$

DGL: $x^2 \underbrace{(-t f'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right))}_{u_t} + t \underbrace{x^2 f'\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)}_{u_x} = 0$

AWA

Zeige: $\tilde{u}(t,x) = x^6 - 3t^2x^3 + \frac{9}{4}t^4$ löst die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} x^2u_t + tu_x = 0 & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^6 & \text{für} \quad t=0,\ x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

Dgl: $x^2\tilde{u}_t + t\,\tilde{u}_x = x^2(-6tx^3 + 9t^3) + t(6x^5 - 9x^2t^2)$

$= -6tx^5 + 9x^2t^3 + t6x^5 - 9x^2t^3 = 0$

AW: $\tilde{u}(0,x) = x^6 - 3\cdot 0^2\cdot x^3 + \frac{9}{4}0^4 = x^6$ ✓

Zeige: $\hat{u}(t,x) = \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$ löst die Anfangswertaufgabe

$\hat{u}(t,x) = f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$ mit $f \hat{=} \cos \Rightarrow$ löst Dgl: siehe S. 7

$$\begin{cases} x^2u_t + tu_x = 0 & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \cos\left(\frac{x^3}{3}\right) & \text{für} \quad t=0,\ x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

Anfangsbedingung: $\hat{u}(0,x) = \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right) = \cos\left(\frac{x^3}{3}\right)$ ✓

Gesucht ist eine Lösung von

$$\begin{cases} x^2 u_t + t u_x = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \underline{4x^6 - 2\cos\left(\frac{x^3}{3}\right)} & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Beh: $u = 4 \cdot \tilde{u} - 2\hat{u}$ löst die AWA

Dgl : klar! Nach Seite 5/6 : : Linearkombinationen von Lösungen lösen Dgl

$\Longrightarrow$ u löst Dgl

Anfangsbedingung ist ebenfalls erfüllt, denn

$u(0,x) = 4\tilde{u}(0,x) - 2\hat{u}(0,x) = 4x^6 - 2 \cdot \cos\left(\frac{x^3}{3}\right)$

Analog für Inhomogenitäten:

Falls

$x^2 \tilde{u}_t + t\tilde{u}_x = 1$

und

$x^2 \hat{u}_t + t\hat{u}_x = e^{-t}$

$\Big\} \Longrightarrow$ $u = 3\tilde{u} + 2\hat{u}$ löst die Dgl

$x^2 u_t + t u_x = 3 \cdot 1 + 2 \cdot e^{-t}$

Lineare Koordinatentransformationen: (Beipiel zu P3)

Löse die Anfangswertaufgabe

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \quad (*)$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

$$u_t(x,0) = 2xe^{-x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Behauptung: Die Substitution $\boxed{\alpha = x + \frac{t}{4}}, \boxed{\mu = x - t}$

liefert für $v(\alpha,\mu) := u(x(\alpha,\mu), t(\alpha,\mu))$

Die Differentialgleichung $v_{\alpha\mu} = 0$

Nachrechnen: Es gilt

$$\boxed{x = \frac{4\alpha + \mu}{5}, \quad t = \frac{4\alpha - 4\mu}{5}}$$

$4\alpha + \mu$
$= 4x + t + x - t = 5x$
$x = \dfrac{4\alpha + \mu}{5}$
analog t
$\alpha - \mu = x + \frac{t}{4} - x + t$
$= \frac{5t}{4}$
$\dfrac{4(\alpha - \mu)}{5} = t$

z. B. $u(x,t) = x + t^2 \ \hat{=}\ \dfrac{4\alpha + \mu}{5} + \left(\dfrac{4\alpha - 4\mu}{5}\right)^2 = v(\alpha,\mu)$

$\frac{4}{5}\alpha + \frac{4}{5}\mu + \frac{16\alpha}{25} - \frac{32}{25}\alpha\mu + \frac{16}{25}\mu^2 = v(\alpha,\mu)$

also

$$u(x,t) = u(x(\alpha,\mu),t(\alpha,\mu)) = u\left(\frac{4\alpha+\mu}{5}, \frac{4\alpha-4\mu}{5}\right) =: v(\alpha,\mu)$$

Kettenregel aus Ana III:

$$u_x \cdot \underbrace{(x(\alpha,\mu))_\alpha}_{4/5} + u_t \cdot \underbrace{(t(\alpha,\mu))_\alpha}_{4/5}$$

$$v_\alpha = u_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t \cdot \frac{dt}{d\alpha} = u_x(x(\alpha,\mu),t(\alpha,\mu)) \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t(x(\alpha,\mu),t(\alpha,\mu)) \frac{dt}{d\alpha}$$

$$v_{\alpha\mu} = \left(u_{xx}\cdot\frac{dx}{d\mu}\cdot\frac{dx}{d\alpha} + u_{xt}\cdot\frac{dt}{d\mu}\cdot\frac{dx}{d\alpha}\right) + \left(u_{tx}\cdot\frac{dx}{d\mu}\cdot\frac{dt}{d\alpha} + u_{tt}\cdot\frac{dt}{d\mu}\cdot\frac{dt}{d\alpha}\right)$$

Hier wegen $x = \frac{4\alpha+\mu}{5}$, $\quad t = \frac{4\alpha-4\mu}{5}$

$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{4}{5}$ $\qquad \frac{dx}{d\mu} = \frac{1}{5}$ $\qquad \frac{dt}{d\alpha} = \frac{4}{5}$ $\qquad \frac{dt}{d\mu} = \frac{-4}{5}$

$$v_\alpha = u_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{4}{5} u_x + \frac{4}{5} u_t$$

$$v_{\alpha\mu} = \left(u_{xx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{xt} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu} \right) + \left(u_{tx} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{tt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)$$

$$= \frac{4}{25} u_{xx} - \frac{16}{25} u_{xt} + \frac{4}{25} u_{tx} - \frac{16}{25} u_{tt} = \frac{4}{25} \underbrace{\left(u_{xx} - 4u_{xt} + u_{xt} - 4u_{tt} \right)}_{u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0}$$

für jede Lösung der ursprünglichen Dgl

(*)

Eine zwei mal stetig differenzierbare Funktion $u(x,t)$ löst genau dann die ursprüngliche Differentialgleichung, wenn

$$\boxed{v_{\alpha\mu} = 0.}$$

Lösung der transformierten Differentialgleichung

Aus $(v_\alpha)_\mu = 0$ folgt, dass v_α unabhängig von μ ist.

$$v(\alpha,\mu)_\alpha = \phi(\alpha) \xrightarrow{\int d\alpha} v(\alpha,\mu) = \Phi(\alpha) + \overbrace{\kappa(\mu)}^{\text{konstant bzgl. } \alpha}$$

$$\hat{=} \; \phi(\alpha) + \Psi(\mu)$$

$\Longrightarrow$ Jede Funktion

$$\alpha = x + \frac{t}{4} \qquad \mu = x - t \longrightarrow \boxed{u(x,t) = \Phi(x + \frac{t}{4}) + \Psi(x - t)}$$

mit hinreichend glatten Funktionen Φ und Ψ löst die Differentialgleichung

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0$$

Probe:

Nun zu den Anfangsbedingungen

$$\boxed{u(x,t) = v(\alpha,\mu) = \Phi(x+\tfrac{t}{4}) + \Psi(x-t)}$$

$$\Longrightarrow u_t(x,t) = \phi'(x+\tfrac{t}{4})\cdot(x+\tfrac{t}{4})_t + \psi'(x-t)\cdot(x-t)_t = \tfrac{1}{4}\phi'(x+\tfrac{t}{4}) - \psi'(x-t)$$

$$u(x,0) \stackrel{!}{=} 0 \qquad\qquad u_t(x,0) \stackrel{!}{=} 2xe^{-x^2}$$

Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \stackrel{!}{=} 0 \Longrightarrow \phi(x+0) + \psi(x-0) = \phi(x) + \psi(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{I}$$

$$u_t(x,0) \stackrel{!}{=} 2xe^{-x^2} \Longrightarrow \tfrac{1}{4}\phi'(x+0) - \psi'(x-0) = \tfrac{1}{4}\phi(x) - \psi'(x) = 2xe^{-x^2} \quad \text{II}$$

$$\text{I} \rightarrow \psi(x) = -\phi(x) \Longrightarrow \psi'(x) = -\phi'(x) \quad (**)$$

$$\text{II} \xrightarrow{(**)} \tfrac{1}{4}\phi'(x) + \phi'(x) = \tfrac{5}{4}\phi'(x) = 2xe^{-x^2}$$

$$\phi'(x) = \tfrac{4}{5}\cdot 2xe^{-x^2} \longrightarrow \phi(x) = -\tfrac{4}{5}\int -2xe^{-x^2}\,dx = \tfrac{4}{5}e^{-x^2} + K$$

$$\psi(x) = -\tfrac{4}{5}e^{-x^2} - K$$

$$u(x,t) = \phi(x+\tfrac{t}{4}) + \psi(x-t) = \tfrac{4}{5}e^{-(x+\frac{t}{4})^2} \cancel{+K} - \tfrac{4}{5}e^{-(x-t)^2} \cancel{-K}$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher gegeben durch

$$u(x,t) = \Phi(x + \frac{t}{4}) + \Psi(x - t) \;=\; -\frac{4}{5}e^{-(x+\frac{t}{4})^2} + \frac{4}{5}e^{-(x-t)^2}.$$

Bemerkung: Bei $u_{tt} + (a+b)u_{tx} + abu_{xx}$

funktionert die Substitution $\alpha = x - bt,\ \mu = x - at$ analog.

Zu H2: Die Hinweise auf dem Aufgabenblatt sollten Wegweiser genug sein.