Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg SoSe 2024

Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 2 Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Linearität von Differentialgleichungen und eine einfache Transformation

Linearität von Differentialgleichungen

Skalare Partielle Differentialgleichung (vgl. Vorlesung Seite 4-6)

$$F(\boldsymbol{x},\, u(\boldsymbol{x}),\, Du(\boldsymbol{x}),\, D^2u(\boldsymbol{x}), \ldots,\, D^m u(\boldsymbol{x})) \;=\; 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

m : Ordnung, wenn mindestens eine $m-$te Ableitung vorkommt.

$n \geq 2$: Dimension des $x-$raums

Linearität von Differentialgleichungen (vgl. Vorlesung Seite 8-9)

Lineare PDE: hängen affin linear von u, Du, $D^2u, \ldots,$ $D^m u$ ab. Nur von $\boldsymbol{x}$ abhängige Koeffizienten.

Semilineare PDE: hängen affin linear von $D^m u$ ab. Nur von $\boldsymbol{x}$ abhängige Koeffizienten der höchsten Ableitungen.

Quasilineare PDE: hängen affin linear von $D^m u$ ab. Die Koeffizienten der höchsten Ableitungen können von $u, Du, \ldots, D^{m-1}u$ abhängen.

Voll nichtlineare PDE: nicht quasilinear.

Beispiele:

- $au_x + bu_y = g(x, y)$ mit einer stetigen Funktion g, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b \neq 0$.

  Ordnung:

  Koeffizienten:

  Inhomogenität:

  Linear?

- $x^2 u_t + tu_x = 0$

  Ordnung:

  Koeffizienten:

  Inhomogenität:

  Linear?

- Telegraphengleichung: $u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0$

  Ordnung:

  Koeffizienten:

  Inhomogenität:

  Linear?

- $u_t + (u^4)_x = 0$

  Ordnung:

  Koeffizienten:

  Inhomogenität:

  Linear?

- $(u_{xx})^2 + u_{xy} + 2u_y = 0$

  Ordnung:
  Linear?

Beispiel zu H1: Prüfe für $x^2u_t + tu_x = 0$ bzw. $u_t + (u^4)_x = 0$ ob beliebige Vielfache von Lösungen wieder Lösungen sind.

Wenn ja, prüfen Sie, ob auch Summen von Lösungen wieder Lösungen sind.

- Es gelte $\tilde{u}_t + (\tilde{u}^4)_x = 0$ und $\tilde{u}(x,t)$ nicht konstant.

  Also $\tilde{u}_t + 4\tilde{u}^3 \cdot \tilde{u}_x = 0 \Longrightarrow$

  Dann gilt für $\hat{u} := k \cdot \tilde{u}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

  $\hat{u}_t + (\hat{u}^4)_x = (k \cdot \tilde{u})_t + 4(k\tilde{u})^3(k\tilde{u})_x =$

- Es gelte $x^2\tilde{u}_t + t\tilde{u}_x = 0$

  Dann gilt für $\hat{u} := k \cdot \tilde{u}$ mit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

  $x^2\hat{u}_t + t\hat{u}_x = x^2(k\tilde{u})_t + t(k\tilde{u})_x =$

Seien nun u^* und $\tilde{u}$ Lösungen der Differentialgleichung ,also

$x^2\tilde{u}_t + t\tilde{u}_x = 0$ und $x^2u_t^* + t\ u_x^* = 0.$

Dann gilt für $\hat{u} := u^* + \tilde{u}$

$x^2\hat{u}_t + t\hat{u}_x = x^2(u^* + \tilde{u})_t + t(u^* + \tilde{u})_x =$

Was gilt dann für drei Lösungen?

Und für Linearkombinationen beliebig vieler Lösungen?

Superposition: (Beipiel zu P1, P2)

Sei f eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass

$$u(t,x) = f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$$

eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung $x^2 u_t + t u_x = 0$ ist.

$u_t(t,x) = \left(f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) \right)_t =$

$u_x(t,x) = \left(f\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right) \right)_x =$

DGL:

Zeige: $\tilde{u}(t,x) = x^6 - 3t^2x^3 + \frac{9}{4}t^4$ löst die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} x^2 u_t + t u_x = 0 & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = x^6 & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Zeige: $\hat{u}(t,x) = \cos\left(\frac{x^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)$ löst die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} x^2 u_t + t u_x = 0 & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \cos\left(\frac{x^3}{3}\right) & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Gesucht ist eine Lösung von

$$\begin{cases} x^2 u_t + t u_x = 0, & \text{für} \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 4x^6 - 2\cos\left(\frac{x^3}{3}\right) & \text{für} \quad t = 0,\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Lineare Koordinatentransformationen: (Beipiel zu P3)

Löse die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = \ 0 \quad &\text{für } x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0 \quad &\text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 2xe^{-x^2} \quad &\text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Behauptung: Die Substitution $\alpha \ = \ x + \frac{t}{4},\ \mu \ = \ x - t$

liefert für $v(\alpha,\mu) := u(x(\alpha,\mu), t(\alpha,\mu))$

Die Differentialgleichung $v_{\alpha\mu} \ = \ 0$

Nachrechnen: Es gilt

$$x = \frac{4\alpha + \mu}{5}, \quad t = \frac{4\alpha - 4\mu}{5}$$

also

$$u(x,t) = u(x(\alpha,\mu), t(\alpha,\mu)) \ = u\left(\frac{4\alpha+\mu}{5}, \frac{4\alpha-4\mu}{5}\right) =: v(\alpha,\mu)$$

Kettenregel aus Ana III:

$$v_\alpha = u_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t \cdot \frac{dt}{d\alpha} =$$

$$v_{\alpha\mu} = \left(u_{xx} \cdot \frac{dx}{d\mu} \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_{xt} \cdot \frac{dt}{d\mu} \cdot \frac{dx}{d\alpha}\right) + \left(u_{tx} \cdot \frac{dx}{d\mu} \cdot \frac{dt}{d\alpha} + u_{tt} \cdot \frac{dt}{d\mu} \cdot \frac{dt}{d\alpha}\right)$$

Hier wegen $x = \frac{4\alpha+\mu}{5}, \quad t = \frac{4\alpha-4\mu}{5}$

$\frac{dx}{d\alpha} =$ $\qquad$ $\frac{dx}{d\mu} =$ $\qquad$ $\frac{dt}{d\alpha} =$ $\qquad$ $\frac{dt}{d\mu} =$

$$
\begin{aligned}
v_\alpha &= u_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{4}{5}u_x + \frac{4}{5}u_t \\
v_{\alpha\mu} &= \left(u_{xx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{xt} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu}\right) + \left(u_{tx} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{tt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu}\right) \\
&= \frac{4}{25}u_{xx} - \frac{16}{25}u_{xt} + \frac{4}{25}u_{tx} - \frac{16}{25}u_{tt} = \frac{4}{25}\left(u_{xx} - 4u_{xt} + u_{xt} - 4u_{tt}\right)
\end{aligned}
$$

Eine zwei mal stetig differenzierbare Funktion $u(x,t)$ löst genau dann die ursprüngliche Differentialgleichung, wenn

$$
\boxed{v_{\alpha\mu} = 0.}
$$

Lösung der transformierten Differentialgleichung

Aus $(v_\alpha)_\mu = 0$ folgt, dass v_α unabhängig von μ ist.

$$v(\alpha,\mu)_\alpha = \phi(\alpha) \overset{\int d\alpha}{\Longrightarrow} v(\alpha,\mu) =$$

$\Longrightarrow$ Jede Funktion

$$u(x,t) = \Phi(x + \frac{t}{4}) + \Psi(x - t)$$

mit hinreichend glatten Funktionen Φ und Ψ löst die Differentialgleichung

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0$$

Probe:

Nun zu den Anfangsbedingungen

$$u(x,t) = v(\alpha, \mu) = \Phi(x + \tfrac{t}{4}) + \Psi(x - t)$$

$$\Longrightarrow u_t(x,t) =$$

$$u(x,0) = \qquad\qquad\qquad u_t(x,0) =$$

Anfangsbedingungen

$$u(x,0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow$$

$$u_t(x,0) \stackrel{!}{=} 2xe^{-x^2} \Longrightarrow$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher gegeben durch

$$u(x,t) = \Phi(x+\frac{t}{4}) + \Psi(x-t) = -\frac{4}{5}e^{-(x+\frac{t}{4})^2} + \frac{4}{5}e^{-(x-t)^2}.$$

Bemerkung: Bei $u_{tt} + (a+b)u_{tx} + abu_{xx}$

funktionert die Substitution $\alpha = x - bt,\ \mu = x - at$ analog.

Zu H2: Die Hinweise auf dem Aufgabenblatt sollten Wegweiser genug sein.