Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung zu Blatt 1 Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Einige Werkzeuge für DGL II

Zur Erinnerung:

Sei $\boldsymbol{V}$ ein reeller oder komplexer Vektorraum versehen mit einem

inneren Produkt /Skalarprodukt $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} >$,

der zugehörigen **Norm** $\|\boldsymbol{v}\|^2 = < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >$

und damit dem **Abstand** $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 = < \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} >$.

Dann bilden $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}, \ldots \boldsymbol{v}^{[m]} \in \boldsymbol{V}$ bzgl. $< ., . >$ ein

Orthonormalsystem wenn

$< \boldsymbol{v}^{[k]}, \boldsymbol{v}^{[j]} > = 0 \qquad \forall k, j \in \{1, 2, \ldots, m\}, k \neq j$ Orthogonalsystem

und

$< \boldsymbol{v}^{[k]}, \boldsymbol{v}^{[k]} > = 1 \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Normierung

Im $\mathbb{R}^3$ z.B.

$v^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$< v^{[1]}, v > = 2 \qquad < v^{[2]}, v > = 3$

Beste Approximation

$< v^{[1]}, v > \cdot v^{[1]} + < v^{[2]}, v > \cdot v^{[2]}$

$= 2 v^{[1]} + 3 v^{[2]}$

Beste Approximation eines $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ als Linearkombination der Form

$$\boldsymbol{v} \approx \sum_{k=1}^{m} a_k \boldsymbol{v}^{[k]}$$

erhält man mit $a_k = < \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}^{[k]} >=$ Länge der Projektion von $\boldsymbol{v}$ auf $\boldsymbol{v}^{[k]}$.

Fourier-Reihen

Hier nur ein kurzer Überblick

Sei V der Vektorraum der stetigen, T–periodischen Funktionen versehen mit dem inneren Produkt

$f(t+T) = f(t) \quad \forall\, t,\ t+T \in D(f)$

$$\boxed{< f, g >:= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) g(t) dt\,.}$$

Dann bilden mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ die Funktionen $u_0(t) := \frac{1}{\sqrt{2}}, = \cos(0.\omega t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$u_k(x) := \cos(k\omega t),\ w_k(t) := \sin(k\omega t)\,, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

bzgl. $< . , . >$ ein **Orthonormalsystem** in $\boldsymbol{V}$. D.h. sie sind $T-$periodisch und

$<w_k, w_l> =$ $$\frac{2}{T}\int_0^T \sin(k\omega t)\cdot\sin(l\omega t))dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ 1 & \text{falls } k = l. \end{cases} \qquad \forall k,l \in \{1,2,\dots,n\}$$

$<u_k, u_l> =$ $$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cdot\cos(l\omega t))dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l, \\ 1 & \text{falls } k = l. \end{cases} \qquad \forall k,l \in \{1,2,\dots,n\}$$

$<u_k, w_l> =$ $$\frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t)\cdot\sin(l\omega t))dt = 0 \qquad \forall k,l \in \{1,2,\dots,n\}\,,$$

$<u_0, u_k> =$ $$\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(k\omega t)dt = 0 \qquad \forall k \in \{1,2,\dots,n\}\,,$$

$<u_0, w_k> =$ $$\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(k\omega t))dt = 0 \qquad \forall k \in \{1,2,\dots,n\}\,,$$

$<u_0, u_0> =$ $$\frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt = 1\,.$$

Beweis: Zweimalige partielle Integration oder Additionstheorem nutzen.

Zum Beispiel gilt $\quad 2\sin(\alpha t)\sin(\beta t) \; = \; \cos((\alpha-\beta)t) - \cos((\alpha+\beta)t).$

$$\int_a^b \cos(\alpha \cdot t)\,dt = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}\Big|_a^b$$

Also für $k, l \in \mathbb{N},\; k \neq l$

$$\int_0^T 2\sin(k\omega t)\cdot\sin(l\omega t)dt = \int_0^T \cos((k\omega - l\omega)t) - \cos((k\omega + l\omega)t)\,dt$$

$$= \left[\frac{\sin((k\omega - l\omega)t)}{k\omega - l\omega} - \frac{\sin((k\omega + l\omega)t)}{k\omega + l\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\frac{\sin((k-l)\omega T) - \cancel{\sin(0)}}{k-l} - \frac{\sin((k+l)\omega T) - \cancel{\sin(0)}}{k+l}\right]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\frac{\sin((k-l)2\pi)}{k-l} - \frac{\sin((k+l)2\pi)}{k+l}\right] \; = \; 0$$

$$T\omega = 2\pi$$

und bei $k = l$

$$\frac{1}{T}\int_0^T 2\sin(k\omega t)\cdot\sin(k\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overbrace{\cos((\underbrace{k\omega - k\omega}_{0})t)}^{1} - \cos((k\omega + k\omega)t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T 1\,dt \; - \; \left[\frac{\sin((2k\omega t)}{2k\omega}\right]_0^T \cdot \frac{1}{T}$$

$$= \frac{T}{T} - \frac{\sin(2k\omega T) - \sin(0)}{2k\omega \cdot T} = \frac{T}{T} - \frac{\sin(4k\pi)}{2k\omega \cdot T} = \frac{T}{T} = 1$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar und **T–periodisch**.

Dann ist die beste Approximation von f als Linearkombination

$$\boxed{F_n(t) = \hat{a}_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(t) + b_k w_k(t)} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

mit oben definiertem Skalarprodukt gegeben durch

$$\hat{a}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad = \left(\frac{2}{T} \int \frac{1}{\sqrt{2}} f(t)\, dt \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = < u_0, f(t) > \cdot\ u_0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \overset{u_k}{\cos(k\omega t)}\, dt \; = < \ f, u_k \ > \qquad k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \underset{w_k}{\sin(k\omega t)}\, dt \; = < \ f, w_k \ > \qquad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(Längen der Projektionen auf die Elemente des ONS)

Übergang $n \longrightarrow \infty$ ergibt die reelle **Fourier-Reihe** von f definiert als

$$\boxed{F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

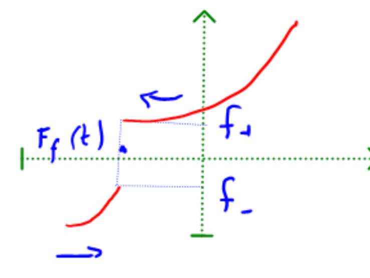
mit den **Fourier-Koeffizienten**

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,dt \left(\overset{k\in\mathbb{N}}{=} < f, u_k > \right) \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$a_0 := \sqrt{2} \cdot < f, u_0 > \Longrightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < f, u_0 > = < f, u_0 > \cdot u_0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt = < f, v_k > \qquad k \in \mathbb{N}$$

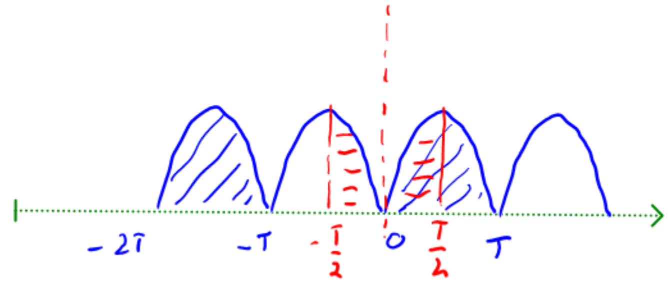
Die Fourierreihe konvergiert gegen $\frac{1}{2}(f_-(t) + f_+(t))$



Schreibweise: $F_f(t) \sim f(t)$ $\qquad (= f(t)$ falls f stetig in $t)$

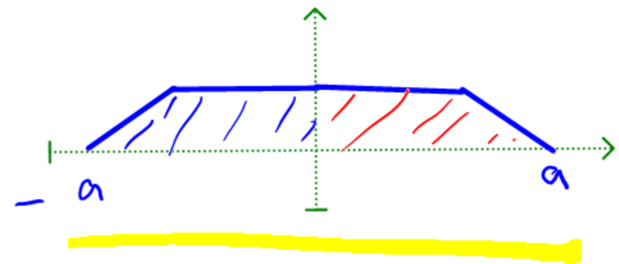
Ist f **periodisch** mit Periode T, so gilt

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \cancel{= 0}$$



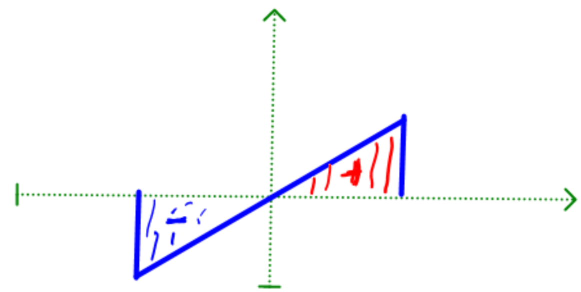
Ist **f gerade** also $f(-t) = f(t)$ so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$$

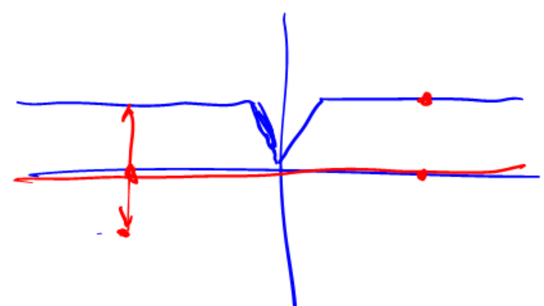


Ist **f ungerade** also $f(-t) = -f(t)$ so gilt

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$$



Für die Fourier-Koeffizienten folgt



Ist **f gerade** also $f(-t) = f(t)$ so gilt

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\sin(k\omega t)}_{\text{ungerade}}\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\, dt = 0$$

und

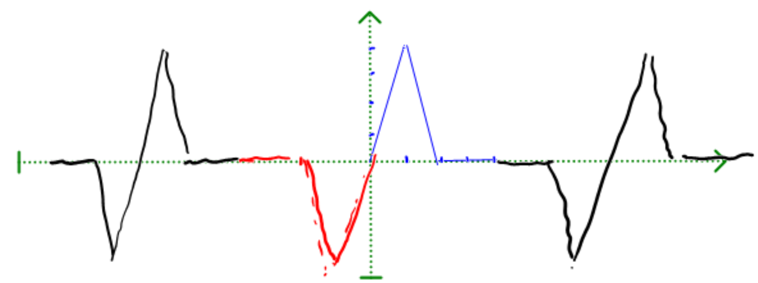
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)\cos(k\omega t)}_{\text{gerade}}\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Ist **f ungerade** also $f(-t) = -f(t)$ so gilt

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \underbrace{f(t)\sin(k\omega t)}_{\text{gerade}}\, dt \qquad k \in \mathbb{N}$$

Beispiel 1) Gegeben sei

$$f(t) = \begin{cases} 4t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4 - 4t & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & t \in [1, 2] \end{cases}$$



gesucht: reelle Fourier-Reihe der 4–periodischen ungeraden Fortsetzung $\hat{f}$ von f.

$$T = 4$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{a_k = 0}$$ weil Fkt. ungerade

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,dt \;=\; \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

$$\underset{4\,=}{=}\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt \;= 1\cdot\int_0^2 f(t)\sin(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= \int_0^{1/2} \underbrace{4t}_{g} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}_{\dot h} dt + \int_{1/2}^{1} \underbrace{(4-4t)}_{\tilde g} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}_{\dot h} dt + \int_1^2 0 \ldots dt$$

$$= \left[g \cdot h\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \dot g \cdot h\,dt + \left[\tilde g \cdot h\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \dot{\tilde g} \cdot h\,dt$$

$$\int \sin(\alpha t)\,dt = \frac{-\cos(\alpha t)}{\alpha} + c$$

$$h(t) = \frac{-\cos(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}$$

$$h(t) = -\frac{\cos(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}$$

$$= \Big[\underbrace{4t}_{g}\cdot\underbrace{\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}}_{h}\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{4}_{\dot g}\underbrace{\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}}_{h}dt}_{\frac{8}{k\pi}\int}$$

$$+\frac{8}{k\pi}\int \cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)dt$$

$$+ \Big[\underbrace{(4-4t)}_{\tilde g}\underbrace{\frac{-\cos(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}}_{h}\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} - \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1}\underbrace{(-4)}_{\dot{\tilde g}}\cdot\underbrace{\frac{-\cos(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}}_{h}dt}$$

$$-\frac{8}{k\pi}\int_{1/2}^{1}\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)dt$$

$$= \frac{-8}{k\pi}\cancel{\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)} + \frac{8}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{k\pi}\cancel{\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)} - \frac{8}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{16}{(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \frac{16}{(k\pi)^2}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right) = \frac{16}{(k\pi)^2}\left(2\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \overset{!}{=} b_k$$

$$b_1 = \frac{16}{\pi^2}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{16}{\pi^2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$b_2 = \frac{16}{4\pi^2}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\right) = \frac{16}{4\pi^2}(2-0)$$

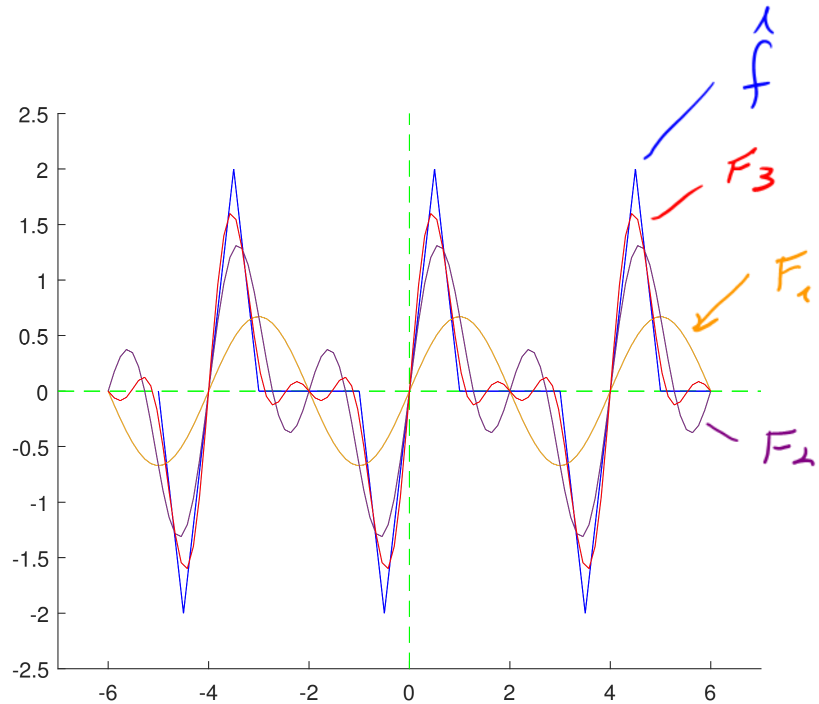
$$b_3 = \frac{16}{9\pi^2}\left(2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{16}{9\pi^2}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$\underbrace{\hat f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}_{\text{Fourier Reihe}}$$

Näherung $F_n(t) := \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(\frac{k\pi}{2} t)$

Da $\hat{f}$ stetig, ungerade und stückweise stetig differenzierbar

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{2} t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(k\pi)^2} \left(2\sin(\frac{k\pi}{4}) - \sin(\frac{k\pi}{2}) \right) \sin(\frac{k\pi}{2} t)$$



$b = \underline{0.6715} \quad \underline{0.8106} \quad \underline{0.4349} \quad 0.0000$

B_k für

Beispiel 2) Berechne Fourier-Koeffizienten $g(t) = \hat{f}(t) + \overbrace{5\sin(\frac{3\pi}{2}t)}^{\tilde{f}(t)}$

$$B_k(t) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \left(\hat{f}(t) + 5\sin(\tfrac{3\pi}{2}t)\right)\sin(\tfrac{k\pi}{2}t)\,dt = \underbrace{\frac{4}{T}\int_0^{T/2}\hat{f}(t)\sin(\tfrac{k\pi}{2}t)\,dt}_{b_k \text{ von oben}} + \underbrace{\frac{4}{T}\int_0^{T/2}5\sin(\tfrac{3\pi}{2}t)\sin(\tfrac{k\pi}{2}t)\,dt}_{\tilde{b}(t)}$$

$$\sin(\tfrac{3\pi}{2}(t+4)) = \sin(\tfrac{3\pi}{2}t + \tfrac{4\cdot 3\pi}{2}) = \sin(\tfrac{3\pi}{2}t + 6\pi) = \sin(\tfrac{3\pi}{2}t).$$

$\Longrightarrow$ g ist ebenfalls 4-periodisch und ungerade.

Gesucht Darstellung

$$F_g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(\frac{k\pi}{2}t)$$

wobei

beste Approximation für $5\sin(\frac{3\pi}{2}t)$

$$\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{2}t) = b_1\sin(\frac{\pi}{2}t) + b_2\sin(\frac{2\pi}{2}t) + b_3\sin(\frac{3\pi}{2}t) + \dots$$

und $\sum \tilde{b}_k \sin(\frac{k\pi}{2}t) = \tilde{b}_1\sin(\frac{\pi}{2}t) + \tilde{b}_2\sin(\frac{2\pi}{2}t) + \tilde{b}_3\sin(\frac{3\pi}{2}t) + \dots$

Beste Approximation für $5\sin(\frac{3\pi}{2}t)$

$\Longrightarrow \tilde{b}_k = 0$ für $k \neq 3$

$\tilde{b}_3 = 5$

$\Longrightarrow B_k = b_k + \tilde{b}_k = b_k \quad \forall k \neq 3$

$B_3 = b_3 + 5$

Eigenwertaufgaben

BEISPIEL: Parameterabhängige Randwertaufgabe (RWA):

Gegeben ist die RWA

$$\boxed{y''(t) + \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.}$$

mit festen vorgegebenen Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L \in \mathbb{R}^+$.

Die sogenannte triviale Lösung ist: $y(t) = 0$, $\forall t$.

Wir suchen **nichttriviale reelle Lösungen:**

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ, für die es nichttriviale Lösungen gibt, heißen **Eigenwerte** der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen **Eigenfunktionen**. $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

Bsp:

$$y'' + \underbrace{36}_{\lambda} y = 0$$

Vorgehen bei Dgl. 2. Ordnung:

$P(\mu) = \mu^2 + 36 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm\sqrt{-36} = \pm 6i$

Allgemeine Lösung

$\hat{c}_1 e^{6it} + \hat{c}_2 e^{-6it}$

– Nullstellen μ_1, μ_2 des Charakteristischen Polynoms bestimmen,

– Reelle Darstellung der Lösung der Dgl:

$y(t) = c_1 \operatorname{Re}(e^{6it}) + c_2 \operatorname{Im}(e^{6it})$

$= c_1 \cos(6t) + c_2 \sin(6t)$ (*)

Bei $\mu_2 \neq \mu_1 \in \mathbb{R}$: $y(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 \cdot t}$.

Bei $\mu_2 = \overline{\mu_1} \notin \mathbb{R}$: $y(t) = c_1 \text{Re}\,(e^{\mu_1 t}) + c_2 \text{Im}\,(e^{\mu_1 t})$.

Bei $\mu_2 = \mu_1$: $y(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 t e^{\mu_1 \cdot t}$.

Für die Übungsaufgabe: Machen Sie diese Fallunterscheidung und versuchen Sie für jeden Fall c_1 und c_2 mit Hilfe der Randdaten zu bestimmen (vgl. DGL I).

z. B. bei Vorgabe

$y(\frac{\pi}{6}) = 0$

$y(A) = 0$

(*) $\Rightarrow y(\frac{\pi}{6}) = c_1 \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + c_2 \underbrace{\sin(\pi)}_{0} = -c_1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

Für nicht triviale Lösung muss $c_2 \neq 0$ gelten

$y(A) = c_2 \sin(6 \cdot A) \overset{!}{=} 0$ und $c_2 \neq 0 \Rightarrow \sin(6A) = 0$

$\Rightarrow 6A = k\pi \Rightarrow A = \frac{k\pi}{6}$

$\Rightarrow$ Die RWA hat nicht für beliebige Vorgaben von Randwerten nichttriviale Lösungen

H1 : Leibniz-Regel : einfach nach der Formel ausrechnen

Differentialoperatoren:

H2

Zur Erinnerung: Gegeben:Funktion $f : D \to \mathbb{R}^1, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$.
Im falle der Existenz der partiellen Ableitungen definiert man

Nabla Operator, Gradient

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial x_n \end{pmatrix} f$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix} = \textbf{grad}\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

Laplace-Operator, Delta

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) = \Delta f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k x_k}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$= f_{x_1 x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \ldots + f_{x_n x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Für Vektorfelder $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^n, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$. D.h.

$$\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x_1,\, x_2,\, \cdots\,,\, x_n) \\ v_2(x_1,\, x_2,\, \cdots\,,\, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1,\, x_2,\, \cdots\,,\, x_n) \end{pmatrix}$$

definiert man

$$\textbf{Divergenz von } \boldsymbol{v} : \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}(x_1, \cdots, x_n)$$

<u>n=2</u>

$$\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,\, y) \\ v_2(x,\, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\, v(x,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,\, y) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,\, y)$$

n=3: $\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,\, y,\, z) \\ v_2(x,\, y,\, z) \\ v_3(x,\, y,\, z) \end{pmatrix},$

$$\operatorname{div} v(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x,\, y,\, z)$$

Bei Strömungs- / Flussproblemen: Quelldichte

Im Fall $n = 3$ definiert man noch die **Rotation** bzw. **Wirbeldichte**

$$\textbf{rot } \boldsymbol{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \overset{0}{\frac{\partial v_3}{\partial y}}(x,\, y,\, z) - \overset{0}{\frac{\partial v_2}{\partial z}}(x,\, y,\, z) \\ \frac{\partial v_1}{\partial z}\overset{0}{(x,\, y,\, z)} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\overset{0}{(x,\, y,\, z)} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,\, y,\, z) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,\, y,\, z) \end{pmatrix}$$

blau: im $\mathbb{R}^2$

Ebene Strömungen können in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet weden: n=2

$$\boldsymbol{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,\, y) \\ v_2(x,\, y) \end{pmatrix} \longleftrightarrow \tilde{\boldsymbol{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x,\, y) \\ v_2(x,\, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

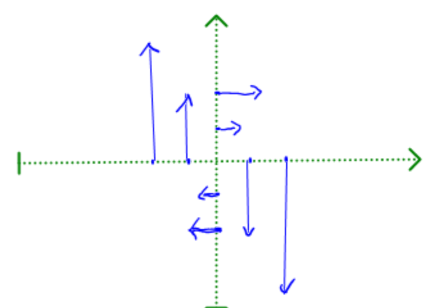
Für $\tilde{\boldsymbol{v}}$ erhält man die Rotation: $(0,\, 0,\, \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,\, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,\, y))^T$. Man schreibt daher abkürzend für $n = 2$:

$$\text{rot}\, \boldsymbol{v}(x,y) = \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,\, y) - \frac{\partial v_1}{\partial y}(x,\, y)$$

Beispiele:

A) Gegeben das Geschwindigkeitsfeld

$$\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \\ -2x \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

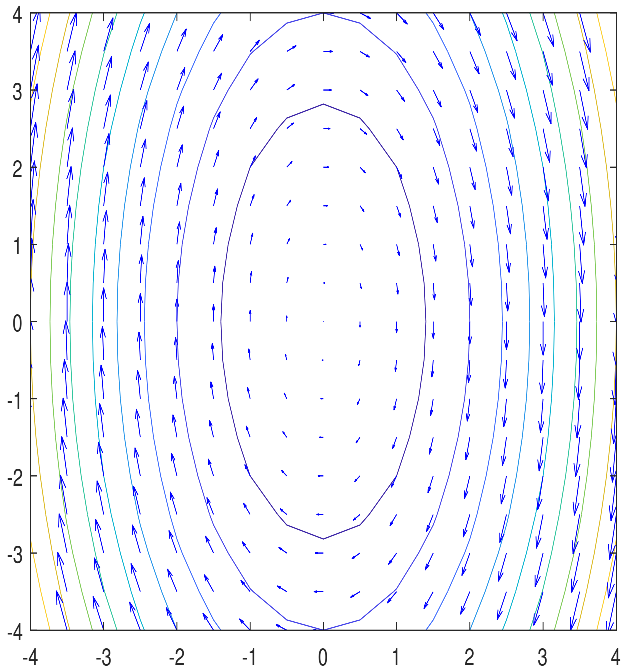


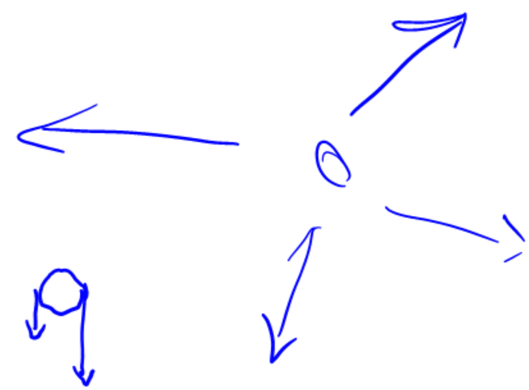
$$\text{div}\ \vec{v}\ (x,y) = (v_1)_x + (v_2)_y = 0$$

$$\text{rot}\ \vec{v}\ (x,y) = (v_2)_x - (v_1)_y = -2 - \tfrac{1}{2}$$

einer zweidimensionalen Strömung.

Berechnen Sie die Quelldichte div$(\boldsymbol{v})$ und die Wirbeldichte **rot**$(\boldsymbol{v})$





B) Hintereinanderschaltung der Operatoren $\quad f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow f(x,y,z) \in \mathbb{R}$

Es sei $f : D \longrightarrow \overset{1}{\mathbb{R}}$, $\quad D \subset \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^2$-Funktion und $\boldsymbol{v} = \nabla f$.

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) = \operatorname{div} \nabla f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = (f_x)_x + (f_y)_y + (f_z)_z$$

$$= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\nabla \operatorname{div} \underbrace{f(\boldsymbol{x})}_{\in \mathbb{R}^1} \quad \text{↯}$$

$$\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{xxx} & f_{yyx} & f_{zzx} \\ f_{xxy} & f_{yyy} & f_{zzy} \\ f_{xxz} & f_{yyz} & f_{zzz} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \ \underbrace{\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}_{\in \mathbb{R}^3} \quad \text{↯}$$