Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 24
12.07.2024

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

WZ = Werkzeug /tools

VB = Vorbereitung für spätere Übungsaufgaben/
Preparation for subsequent exercises

xxx = wichtig /important

$\emptyset$ = Nicht geeignet als Klausuraufgabe / Not suitable as an exam task

Sprechstunden

Individuelle Sprechstunden können jederzeit per e-mail vereinbart werden.
You can make an individual appointment by e-mail at any time

Offene Sprechstunden werden ab ca. 10.08. angeboten.
Office hours without registration will be offered from approx. August 10.

Blatt 1:

P1: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$

VB

P2: Gerade/Ungerade Fortsetzung von Funktionen, Fourier-Reihen

VB

H1: Leibnizregel für die Ableitung von Integralen WZ für Vorlesung

H2: Differentialoperatoren ∇, Δ, **rot**, ...

WZ

Blatt 2:

P1, P2: Gegebene Lösungungsformeln prüfen und an Anfangsdaten anpassen.

VB

WZ / VB

Prüfen ob Summen von Lösungen wieder Lösungen sind. xx

P3: AWA $u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$,

mit Hilfe von Substitution auf $v_{\alpha\mu} = 0$ transformieren und lösen. ∅

∅ ∅

H1a: Ordnung angeben

und entscheiden ob eine lineare, semilineare, quasilineare oder eine (voll-) nichtlineare Differentialgleichung vorliegt

H1b: Prüfe ob Vielfache und Summen von Lösungen wieder Lösungen sind

xx

H2: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung, Transportgleichung $u_t - cu_x = 0$ ∅

✓

Blatt 3:

P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode Standard, AWA:

XXX

einfache ODE
einfache Integrale z. B
über cos/sin/exp/ln/ t^k
auch
cos($\alpha \cdot x$) oder z. B
$\frac{1}{(t+3)^k}$ oder $e^{\beta t+\gamma}$

$$u_t + a(x,t,u)u_x = b(x,t,u)$$

P3: Erste nichtlineare Dgl , Fragen zu Charakteristiken:
Form der Charakteristik/ Lösung konstant entlang Charakteristiken?

VB gute Übung

H2: Charakteristiken-Methode eine Dimension höher

muss nicht in die Klausur / aber gute Übung

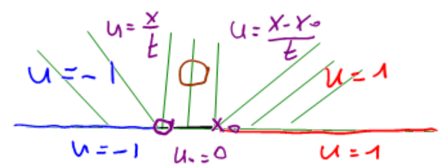
H3: verschiedene Differentialgleichungen . Sind die Charakteristiken Geraden?
Ist die Lösung konstant entlang der Charakteristiken?

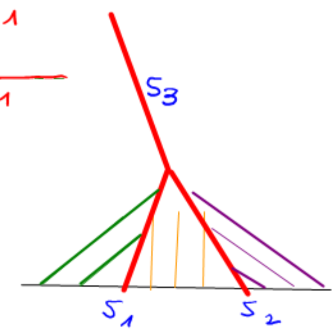
XX

Blatt 4: Erhaltungsgleichungen

P1: $u_t + (u+2)u_x = 0$ mit stetigen fallenden Daten.
Lösen, bis welche Zeit t^* gültig? Charakteristiken zeichnen.

P2: Burgers Gleichung
P2 a: Zwei Verdünnungswellen
P2 b: Zwei Stoßwellen, $t^* = ?$ und danach?

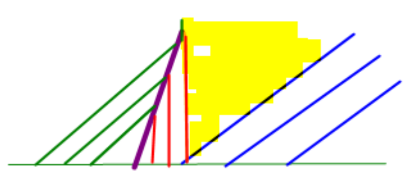




P3: Gegebene Vorschläge prüfen, ob schwache Lösung, physikalisch sinnvolle Lösung, Sprungbedingung erfüllt?
für andere Flussfunktionen, hier $u_t + \left(\frac{u^4}{16}\right)_x = 0$

H1: Lösung (Verdünnugs- bzw. Stoßwelle) berechnen
für andere Flussfunktionen, hier $F(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$

H2: Burgers Gleichung: Verdünnungswelle trifft Stoßwelle.



H3: Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion. $\not\phi$

H3 a: Kontinuitätsgleichung aufstellen

H3 b: Sind die Charakteristiken Geraden? ($\checkmark$)

H3 c: Charakteristiken skizzieren

H3 d: Entropiebedingung: $f'(u_l) > \dot{s}(t) > f'(u_r)$

Blatt 5:

P1: Laplace Gleichung in Kreisscheibe: Produktansatz. xxx
$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung
$\longrightarrow$ Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

Anwendung: ja x
z. B.

P2: Welche Polynome dritten Grades sind harmonisch?

$\Delta u = 0$ $x^2+y^2 \leq 4$
$\Delta u = 0$ $u(x,y) = 1+x$ $x^2+y^2=4$
erfüllt $\Delta u = 0$

P3: Eigenschaften harmonischer Funktionen ∅ aber
Min-/Max-Prinzip/Eindeutigkeit ∅ aber
Voraussetzungen für Max-Prinzip

$\longrightarrow u(x,y) = 1+x$ $\forall x,y$
$\forall x,y$ mit $x^2+y^2 \leq 4$

H1: Rotationssymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung auf Ring.
Lösungsdarstellung mit Hilfe der Fundamentallösung xxx

H2: Laplace Gleichung polar herleiten. ∅

H3: Rotationssymmetrische Lösung der Poisson-Gleichung auf Ring: Nutze H2.

zu viel ODEs + Technik ∅

Blatt 6:

P1 a) ARWA: Inhomogene Wärmeleitung, inhomogene Randwerte
Homogenisieren der Randdaten Dgl $u_t - cu_{xx} = h(x,t)$ xxx
$\longrightarrow$ homogene DGL, Anfangsdaten $\not\equiv 0$
$v := u - [\dots]$

P1 b) ARWA: homogene Wärmeleitung, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung xxx
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

$\longrightarrow v$

P1 c) Lösung der ursprünglichen Aufgabe zusammensetzen xxx

$u = v + [\dots]$

P2 a) ARWA: homogene Wellengleichung, homogene Randwerte:
Produktansatz , geschlossene Lösungsdarstellung
Koeffizientenvergleich und/oder Fourier-Koeffizienten. xxx

P2 b) ARWA: Inhomogene Wellengleichung, inhomogene Randwerte

Homogenisieren der Randdaten

xxx

H1 a) ARWA: homogene Wärmeleitungsgleichung, homogene Randwerte:

geschlossene Lösungsdarstellung

Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

xxx

H1 b) ARWA: Inhomogene Wärmeleitung, inhomogene Randwerte

Homogenisieren der Randdaten

xxx

$\longrightarrow$ inhomogene DGL, Anfangsdaten $\neq 0$

Lösen über Fourier/Gewöhnliche DGL

H2) ARWA: Inhomogene Wellengleichung, homogene Randwerte

$\longrightarrow$ geschlossene Lösungsdarstellung

$\longrightarrow$ System linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$\longrightarrow$ Daten aus Koeffizientenvergleich mit Fourier-Reihen

$\longrightarrow$ aber ODEs zu lösen.

zu aufwendig

$\emptyset$

In der Klausur: direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln für **Differentialgleichungen zweiter Ordnung** unter:

Formeln

`https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/24/uebu`
`formelsammlung_d2_24.pdf`

(ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Zusammenstellung einiger (nicht aller) Formeln für Differentialgleichungen erster Ordnung:

Charakteristikenmethode

$$\boxed{1} \cdot u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Definiere: $\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$, $\quad \nu(t) = u(\gamma(t)) = u\left(x(t), t\right)$

Und verlange $\dot{x}(t) = a(x(t), t, \nu(t))$

Dann gilt für jede Lösung der DGL

$$\dot{\nu}(t) = b(x(t), t, \nu(t))$$

Lösen/Integriere $\Longrightarrow$ Integrationskonstanten $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Drücke $x(0)$ mit Hilfe von (x,t,u) aus und nutze Anfangsbedingung.

Löse wenn möglich nach u auf .

Beispiel: $u_t + \underline{\underline{3x}}\, u_x = \dfrac{1}{2t+1}$ $\qquad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\dot{x}(t) = 3x(t)$

$\dfrac{dx}{dt} = 3x \implies \dfrac{dx}{x} = 3\,dt$

$\int \dfrac{dx}{x} = \int 3\,dt \implies \ln(|x|) = 3t + \hat{c}$

$\xrightarrow[\dots]{\exp} \boxed{x = c\,e^{3t}}$

$(*) \quad x(0) = c \stackrel{\downarrow}{=} x\,e^{-3t}$

$\dot{v}(t) = \dfrac{1}{2t+1} \xRightarrow{\int dt}$

$v(t) = \dfrac{\ln(2t+1)}{2} + D \qquad (**)$

$v(0) = \underbrace{\dfrac{\ln(1)}{2} + D}_{= D} \stackrel{!}{=} u(x(0),0) = u_0(x(0)) = \dfrac{1}{1 + \underline{(x(0))}^2}$

$D \stackrel{(*)}{=} \dfrac{1}{1 + \underline{(x e^{-3t})}^2}$

$(**) \quad u(x,t) = \dfrac{\ln(2t+1)}{2} + \dfrac{1}{1 + (x e^{-3t})^2}$

$> u(x,t) = \dfrac{1}{(x\,e^{-3t})^2 + 1} + \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t + (F(u))_x = 0 .$$

$F' = f$

$$\frac{dx}{dt} = f(u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{1}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Oft sind Skizzen hilfreich

Für (Riemann Problem)

$u_t + (F(u))_x = 0, (F$ streng konvex), $\qquad u(x,0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases}$

Burgers $\quad F(u) = \frac{u^2}{2}$

$f(u) = F'(u) = u =$ Identität

Physikalisch sinnvoll (Entropielösung): $F'(u_l) > \dot{s}(t) > F'(u_r)$

Burgers $u_l > u_r$

- Im Fall $F'(u_l) > F'(u_r)$: Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ mit:

Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

$$\boxed{\dot{s}(t) = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r}}$$

$t = 0$

$s(0) = x_0$

$s(t) = x_0 + \dot{s}(t) \cdot t$

$t = t^*$

$s(t^*) = x^*$

evtl. ausrechnen

$s(t) = s(t^*) + \dot{s}(t^*)(t - t^*)$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq s(t), \\ u_r & x > s(t)\,. \end{cases}$$

- Im Fall $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (F')^{-1}$

bei Burgers

$g =$ Identität

$F'(u) =$ Identität

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + F'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\dfrac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + F'(u_l) \cdot t < x < x_0 + F'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \geq x_0 + F'(u_r) \cdot t\,. \end{cases}$$