Fachbereich Mathematik **SoSe 2024**
Prof. Dr. T. Schmidt

Klausur Differentialgleichungen II

26. August 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES/ES	IIW/IN	MB	MTB/MEC	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum$ =

Aufgabe 1: [5 Punkte]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_t + \frac{1}{t+1} \cdot u_x = u \qquad \text{für} \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(x,0) = e^{-x} \qquad \text{für} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Geben Sie die charakteristischen Gleichungen für dieses Problem an und bestimmen Sie deren Lösungen.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

Lösung:

a) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:
$\gamma(t) = \binom{x(t)}{t}$ mit $\dot{\gamma}(t) = \binom{\dot{x}(t)}{1}$
und $\nu(t) := u(\gamma(t))$
$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+1} \Longrightarrow x(t) = \ln(t+1) + C_1$.
Aus $x(0) = \ln(1) + C_1 = C_1$ folgt
$x(t) = \ln(t+1) + x(0)$.
$\frac{d\nu}{dt} = \nu(t) \Longrightarrow \nu(t) = C_2 e^t$.
Aus $\nu(0) = C_2 e^0 = C_2$ folgt
$\nu(t) = \nu(0)e^t$. **[3 Punkte]**

b) Aus $x = \ln(t+1) + x(0)$ folgt

$$x(0) = x(t) - \ln(t+1)$$

und mit

$$\nu(0) = u(x_0, 0) = e^{-x_0}$$

erhalten wir schließlich

$$u(x,t) = e^{-(x-\ln(t+1))} \cdot e^t = (t+1)e^{t-x}.$$

[2 Punkte]

Aufgabe 2: [4+1 Punkte]

Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \leq -1, \\ 0 & \text{für } -1 < x \leq 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die physikalisch sinnvolle Lösung des Anfangswertproblems für $\to C$)
Problem 2) inhomogene DGl, homogene Randwerte: Produktansatz
geschlossene Lösungsdarstellung
System gewöhnlicher Differentialgleichung
Koeffizientenvergleich oder Fourier-Koeffizienten.

$0 < t < 1$.

b) Warum gilt die Lösungsformel aus (a) nur für $t < 1$?

Lösung:

a) Die Lösung setzt sich zusammen aus den Lösungen zweier Riemann-Probleme. Wir bezeichnen mit $F(u) = \frac{u^2}{2}$ den Fluss der Burgers-Gleichung und erhalten wegen $2 > 0$ zuerst eine Stoßwelle $s(t)$ mit

$$\dot{s}(t) = \frac{F(2) - F(0)}{2 - 0} = \frac{1}{2}(2 + 0) = 1 \quad \text{und} \quad s(0) = -1$$

$$\Rightarrow \qquad s(t) = -1 + t. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Wegen $0 < 1$ erhalten wir weiterhin eine Verdünnungswelle mit Rändern

$$F'(0)t = 0, \qquad F'(1)t = t. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Innerhalb der Verdünnungswelle hat u die Form

$$u(x,t) = (F')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}.$$

Zusammen gilt also

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für} & x \leq -1 + t, \\ 0 & \text{für} & -1 + t < x < 0, \\ \frac{x}{t} & \text{für} & 0 \leq x \leq t, \\ 1 & \text{für} & t < x. \qquad \textbf{[1 Punkt]} \end{cases}$$

b) Bei $t = 1$ trifft die Stoßwelle auf die Verdünnungswelle und die Lösungsdarstellung aus (a) gilt nicht mehr. **[1 Punkt]**

Aufgabe 3: [1+2,5+2,5 Punkte]

Bestimmen Sie beschränkte Lösungen der folgenden Randwertaufgaben für die Laplace-Gleichung: Sie können die Lösungen in kartesischen oder Polarkoordinaten angeben.

a) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad \Omega_1 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < 25\}, \\ u(x,y) = 4 & \text{für} \quad x^2+y^2 = 25. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad \Omega_1 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < 25\}, \\ u(x,y) = u(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = 3\sin(2\phi) & \text{für} \quad x^2+y^2 = 25. \end{cases}$

c) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf} \quad \Omega_2 := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2,\ 1 < x^2+y^2 < 25\} \\ u(x,y) = 4 & \text{für} \quad x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) = 2 & \text{für} \quad x^2+y^2 = 25. \end{cases}$

Lösung: [1+2,5+2,5 Punkte]

a) Die konstante Funktion $u(x,y) = 4$ löst die Laplace Gleichung und ist somit die eindeutige Lösung.

b) Mit $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$ und $v(r,\phi) = u(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$ lautet die Lösungsdarstellung

$$v(r,\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k\cos(k\varphi) + d_k\sin(k\varphi)\right) r^k\,.$$

Die Randdaten liefern noch die Bedingung

$$\begin{aligned} v(5,\varphi) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k\cos(k\varphi) + d_k\sin(k\varphi)\right) 5^k \\ &= 3\sin(2\varphi)\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $25d_2 \overset{!}{=} 3$ und alle anderen Koeffizienten $= 0$.

Also die Lösung

$$v(r,\phi) = \frac{3r^2}{25}\sin(2\phi)\,.$$

Eine Umrechnung in kartesische Koordinaten ist hier nicht verlangt. Wer dennoch umrechnet, erhält

$$u(x,y) = \frac{6(x^2+y^2)}{25}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{6xy}{25}.$$

c) Da $(0,0)^\top \notin \Omega_2$, gilt mit der Fundamentallösung

$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln(|(x,y)|) = \frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ die Form

$$u(x,y) = a\Phi(x,y) + b.$$

Aus den Randbedingung erhalten wir

$\frac{a}{2\pi}\ln(1) + b = b \overset{!}{=} 4$

$\frac{a}{2\pi}\ln(5) + 4 \overset{!}{=} 2 \;\Rightarrow\; a = \frac{-4\pi}{\ln(5)}$,

also $u(x,y) = 4 - \frac{4\pi}{\ln(5)} \cdot \frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2+y^2}) = 4 - \frac{2}{\ln(5)}\ln(\sqrt{x^2+y^2})$.

Aufgabe 4: [3+1 Punkte]

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 16u_{xx} &= 4\cos(t)\Big(1 - \frac{x}{2\pi}\Big) && \text{für } x \in (0, 2\pi), t > 0, \\ u(x, 0) &= \frac{x}{2\pi} && \text{für } x \in [0, 2\pi], \\ u(0, t) &= 4\sin(t), \quad u(2\pi, t) = 1 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

a) Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten für eine Funktion $v(x, t)$.

   Geben Sie die neue Anfangsrandwertaufgabe (Differentialgleichung , Anfangsbedingungen und Randbedingungen) an.

b) Geben Sie ohne Rechnung eine Lösung v für die Randwertaufgabe mit homogenen Randwerten aus Teil a) an. Welche Lösung u erhält man demnach für die ursprüngliche Aufgabe?

Lösung:

a) Homogenisierung:

   $v(x, t) = u(x, t) - \Big[4\sin(t) + \frac{x}{2\pi}(1 - 4\sin(t))\Big] = u(x, t) - \frac{x}{2\pi} + 4\sin(t)(\frac{x}{2\pi} - 1)\,.$

   oder

   $u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{2\pi} - 4\sin(t)(\frac{x}{2\pi} - 1)\,.$ **[1 Punkt]**

   Dann gilt:

   $u_t = v_t - 4\cos(t)(\frac{x}{2\pi} - 1),$

   Neue DGL: $v_t + 4\cos(t)(1 - \frac{x}{2\pi}) - 16v_{xx} = 4\cos(t)(1 - \frac{x}{2\pi}) \Longleftrightarrow$

   $\boxed{v_t - 16v_{xx} = 0.}$

   Anfangswerte:

   $v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{x}{2\pi} + 4\sin(0)(\frac{x}{2\pi} - 1) = \frac{x}{2\pi} - \frac{x}{2\pi} = 0.$ **[2 Punkte]**

   Randwerte:

   $v(0, t) = u(0, t) - \Big[4\sin(t) + \frac{0}{2\pi}(1 - 4\sin(t))\Big] = 4\sin(t) - 4\sin(t) = 0.$

   $v(2\pi, t) = u(2\pi, t) - \Big[4\sin(t) + \frac{2\pi}{2\pi}(1 - 4\sin(t))\Big] = 1 - [4\sin(t) + 1 - 4\sin(t)] = 0.$

b) Da die Differentialgleichung homogen ist und sowohl die Randwerte als auch die Anfangswerte verschwinden, ist $v \equiv 0$ die Lösung und damit

   $u(x, t) = 0 + \frac{x}{2\pi} - 4\sin(t)(\frac{x}{2\pi} - 1).$ **[1 Punkt]**