

## Klausur Differentialgleichungen II

26. August 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.: 

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang: 

AIW	CI	ET	GES	IIW/IN	MB	MTB/MEC	SB	
-----	----	----	-----	--------	----	---------	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift: 

--

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\Sigma =$
------------

**Aufgabe 1: [5 Punkte]**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$u_t + \frac{1}{t+1} \cdot u_x = u \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, 0) = e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

- a) Geben Sie die charakteristischen Gleichungen für dieses Problem an und bestimmen Sie deren Lösungen.
  
- b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.







**Aufgabe 3: [1+2,5+2,5 Punkte]**

Bestimmen Sie beschränkte Lösungen der folgenden Randwertaufgaben für die Laplace-Gleichung: Sie können die Lösungen in kartesischen oder Polarkoordinaten angeben.

$$\text{a) } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} & \Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 25 \right\}, \\ u(x, y) = 4 & \text{für} & x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} & \Omega_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 25 \right\}, \\ u(x, y) = u(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) = 3 \sin(2\phi) & \text{für} & x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} & \Omega_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, 1 < x^2 + y^2 < 25 \right\} \\ u(x, y) = 4 & \text{für} & x^2 + y^2 = 1, \\ u(x, y) = 2 & \text{für} & x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$



**Aufgabe 4: [3+1 Punkte]**

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t - 16u_{xx} &= 4 \cos(t) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) && \text{für } x \in (0, 2\pi), t > 0, \\u(x, 0) &= \frac{x}{2\pi} && \text{für } x \in [0, 2\pi], \\u(0, t) &= 4 \sin(t), \quad u(2\pi, t) = 1 && \text{für } t > 0.\end{aligned}$$

- a) Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten für eine Funktion  $v(x, t)$ . Geben Sie die neue Anfangsrandwertaufgabe (Differentialgleichung, Anfangsbedingungen und Randbedingungen) an.
- b) Geben Sie ohne Rechnung eine Lösung  $v$  für die Randwertaufgabe mit homogenen Randwerten aus Teil a) an. Welche Lösung  $u$  erhält man demnach für die ursprüngliche Aufgabe?

