Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -x \cdot \sin(t) && \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) &= 1 - x + 4\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ u_t(x,0) &= x + 3\sin(6\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ u(0,t) &= 1, \quad u(1,t) = \sin(t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) &= 4\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ v_t(x,0) &= 3\sin(6\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ v(0,t) &= 0, \quad v(1,t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Lösungsskizze:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{x}{L}(\sin(t) - 1) = u(x,t) - 1 - x\sin(t) + x\,.$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + 1 + x\sin(t) - x. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + x\,\cos(t),\ u_x = v_x + \sin(t) - 1$$
$$u_{tt} = v_{tt} - x\,\sin(t),\ v_{xx} = u_{xx} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Neue DGL:

$$v_{tt} - x\sin(t) - 4v_{xx} = -x \cdot \sin(t) \iff \boxed{v_{tt} - 4v_{xx} = 0\,.} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Anfangswerte:

$$v(x,0) = u(x,0) - 1 - x(\sin(0) - 1) = 1 - x + 4\sin(2\pi x) - 1 + x \Longrightarrow$$

$$\boxed{v(x,0) = 4\sin(2\pi x)} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - x\cos(0) = x + 3\sin(6\pi x) - x \Longrightarrow$$

$$\boxed{v_t(x,0) = 3\sin(6\pi x)} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(1,t) = 0}$

b) Mit $L = 1$ und $c^2 = 4$ lautet die Lösungsformel:

$$v(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \,\cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \;+\; B_k \,\sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)\right] \,\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Für $t = 0$ also

$$v(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \,\sin\left(k\pi x\right) \;\overset{!}{=}\; 4\sin(2\pi x)$$

Also $A_2 = \; 4$ und $A_k = 0$ sonst. **[2 Punkte]**

$$v_t(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[-A_k \cdot 2k\pi \cdot \sin\left(2k\pi t\right) \;+\; B_k \;\cdot 2k\pi \cdot \cos\left(2k\pi t\right)\right] \,\sin\left(k\pi x\right)$$

und für $t = 0$:

$$v_t(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} B_k \;\cdot 2k\pi \,\sin\left(k\pi x\right) \overset{!}{=} \; 3\sin(6\pi x)$$

Also $B_6 = \frac{3}{2\cdot 6\cdot \pi} \;=\; \frac{1}{4\pi}$ und $B_k = 0$ sonst.

$$v(x,t) \;=\; 4\,\cos\left(4\pi t\right)\,\sin\left(2\pi x\right) \;+\; \frac{1}{4\pi}\,\sin\left(12\pi t\right)\,\sin\left(6\pi x\right)$$ **[2 Punkte]**

Aufgabe 2:

Aus der Vorlesung kennen Sie die Formel von d'Alembert

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\, d\alpha$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung

$$\hat{u}_{tt} - c^2\hat{u}_{xx} = 0,\ \hat{u}(x,0) = f(x),\ \hat{u}_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R},\ c > 0.$$

a) **(Nur für die ganz schnellen Teilnehmer:innen)** Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$
die folgende inhomogene Anfangswertaufgabe löst.
$$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0.$$
Tipp: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale (vgl. Blatt 1H):

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)dt + b'(x)\, f(x,b(x)) - a'(x)\, f(x,a(x))}$$

b) Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -4x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= 1, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cos(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Berechnen Sie eine Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ &\hat{u}(x,0) = 1,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Teil a) eine Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} = -4x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ &\tilde{u}(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{u}_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass $u = \tilde{u} + \hat{u}$ die Anfangswertaufgabe (1) löst.

Lösung:

a) $$\tilde{u}_x(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t [h(x-c(\tau-t),\tau) - h(x+c(\tau-t),\tau]\,\mathrm{d}\tau$$
$$\tilde{u}_{xx}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t [h_\omega(x-c(\tau-t),\tau) - h_\omega(x+c(\tau-t),\tau]\,\mathrm{d}\tau$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_{x+c(t-t)}^{x-c(t-t)} h(\omega,t)\,\mathrm{d}\omega \\ &+ \frac{1}{2c}\int_0^t [h(x-c(\tau-t),\tau)\cdot c - h(x+c(\tau-t),\tau)\cdot(-c)]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t [h(x-c(\tau-t),\tau) + h(x+c(\tau-t),\tau)]\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{tt}(x,t) &= \frac{1}{2}\left\{h(x,t)+h(x,t) + \int_0^t [h_\omega(x-c(\tau-t),\tau)\cdot c + h_\omega(x+c(\tau-t),\tau)(-c)]\,\mathrm{d}\tau\right\} \\ &= h(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^t [h_\omega(x-c(\tau-t),\tau) - h_\omega(x+c(\tau-t),\tau)]\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t)$. Für die Anfangswerte erhält man
$$\tilde{u}(x,0) = \frac{1}{2c}\int_0^0 \cdots = 0\,,$$
und
$$\tilde{u}_t(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^0 \cdots = 0\,.$$

b) (i) Lösung der homognen Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten nach d'Alembert
$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\cos(\eta)d\eta = 1 + \frac{1}{4}(\sin(x+2t) - \sin(x-2t)) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x)\sin(2t)$$

(ii) Lösung der inhomognen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten
$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} -4\omega\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau = \frac{-4}{8}\int_0^t \Big[(x-2(\tau-t))^2 - (x+2(\tau-t))^2\Big]\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t 8x(\tau-t)\mathrm{d}\tau = -2xt^2.\end{aligned}$$

(iii) Die Lösung des ursprünglichen Problems setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen:
$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x)\sin(2t) - 2xt^2$$

Probe:

$u(x,0) = 1,\ u_t(x,t) = \cos(x)\cos(2t) - 4xt,\ u_t(x,0) = \cos(x),$

$u_x = -\frac{1}{2}\sin(x)\sin(2t) - 2t^2,\ u_{xx} = -\frac{1}{2}\cos(x)\sin(2t),$

$u_{tt} = -2\cos(x)\sin(2t) - 4x\,.$

$u_{tt} - 4u_{xx} = -2\cos(x)\sin(2t) - 4x - 4(-\frac{1}{2}\cos(x)\sin(2t)) = -4x\,.$

Bearbeitung: 10.07- 14.07.2023