Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= 3\sin(2\pi x)\cdot e^{-2t} && x\in(0,1),\ t>0\\
u(x,0) &= u_0(x) = \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x) && x\in[0,1],\\
u_t(x,0) &= v_0(x) = 0 && x\in[0,1],\\
u(0,t) &= 0 && t>0,\\
u(1,t) &= 0 && t>0,
\end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin(k\omega x), \qquad \omega = \frac{\pi}{1}$$

in die Differentialgleichung ein. Sie erhalten gewöhnliche Differentialgleichung en für die q_k . Die Anfangsbedingungen liefern die Anfangsdaten für die q_k .

Lösung:

Einsetzen des Ansatzes ergibt mit $\omega = \pi$ und $c = 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k''(t)\sin(k\omega x) + c^2(k\omega)^2 q_k(t)\sin(k\omega x) \overset{!}{=} 3\sin(2\pi x)\cdot e^{-2t}$$

Wir erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichung en

$$q_2''(t) + 2^2(2\pi)^2 q_2(t) = 3e^{-2t}$$
$$q_k''(t) + 2^2(k\pi)^2 q_k(t) = 0 \qquad \forall\, k \neq 0$$

Wir setzen nun den Ansatz in die Anfangsbedingungen ein

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(0)\sin(k\pi x) \overset{!}{=} \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x)$$

Also lesen wir ab: $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 4$, $q_k(0) = 0$ sonst!

Die zweite Anfangsbedingung liefert zusammen mit Lösungsansatz

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k'(0)\sin(k\omega x) \overset{!}{=} 0$$

Also $\quad q_k'(0) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}\,.$

Für $k \notin \{1,2\}$ haben wir die die Anfangswertaufgabe

$q_k''(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) \;=\; 0\,, \qquad q_k(0) = 0,\; q_k'(0) = 0\,.$

Mit der Lösung: $q_k(t) = 0\,.$

Für $k = 1$ haben wir mit $c = 2$ und $\omega = \pi$ die Anfangswertaufgabe:

$q_1''(t) + 4\pi^2 q_1(t) \;=\; 0\,, \qquad q_1(0) = 1,\; q_1'(0) = 0\,.$

Mit der allgemeinen Lösung: $\qquad q_1(t) = \; k_1\cos(2\pi t) + \hat{k}_1\sin(2\pi t)\,.$

Anpassen an Anfangswerte liefert: $q_1(t) = \; \cos(2\pi t)$

Für $k = 2$ haben wir die Anfangswertaufgabe:

$q_2''(t) + 16\cdot\pi^2 q_2(t) \;=\; 3e^{-2t}\,, \qquad q_2(0) = 4\,,\; q_2'(0) = 0$

Zugehörige homogene Dgl: $q_{2,h}''(t) + 4^2\cdot\pi^2 q_{2,h}(t) \;=\; 0$

Mit der allgemeinen Lösung: $q_{2,h}(t) \;=\; k_2\cos(4\pi t) + \hat{k}_2\sin(4\pi t)$

Ansatz für die Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung: $q_{2,p}(t) \;=\; a\,e^{-2t}$

$$4a + 16\cdot\pi^2 a \;=\; 3 \implies a = \frac{3}{4+16\pi^2}$$

$$q_2(t) \;=\; k_2\cos(4\pi t) + \hat{k}_2\sin(4\pi t) \;+\; \frac{3}{4+16\pi^2}\,e^{-2t}$$

$$q_2(0) = k_2 \;+\; \frac{3}{4+16\pi^2} \;=\; 4 \iff k_2 \;=\; 4 - \;\frac{3}{4+16\pi^2}$$

$$q_2'(0) = \hat{k}_2\,4\pi \;-\; \frac{6}{4+16\pi^2} \;=\; 0 \iff \hat{k}_2 \;=\; \frac{3}{2\pi(4+16\pi^2)}$$

$$q_2(t) \;=\; \frac{13+64\pi^2}{4+16\pi^2}\cos(4\pi t) + \frac{3}{2\pi(4+16\pi^2)}\sin(4\pi t) \;+\; \frac{3}{4+16\pi^2}\,e^{-2t}$$

Und damit dann

$$\begin{aligned} u(x,t) = \;& \cos(2\pi t)\sin(1\cdot\pi x) \\ & + \frac{1}{4+16\pi^2}\left((13+64\pi^2)\,\cos(4\pi t) + \frac{3}{2\pi}\sin(4\pi t) \;+\; 3\,e^{-2t}\right)\sin(2\cdot\pi x)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(Damit Sie nicht auf die Idee kommen, dass man alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einfachen Produktansätzen lösen kann.)*

Am Anfangsort $x = 0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) = U_0 \cos(\omega t) \qquad t \geq 0,\, \omega > 0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x > 0, t > 0$. Man erhält U als Lösung der sogenannten Telegraphengleichung

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} + (\alpha + \beta) U_t + \alpha\beta U = 0 .$$

Dabei sind α, β, c konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x \to \infty .$$

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt!

b) Versuchen Sie es mit einem Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung (Faktor e^{-kx}) mit einem zeitlich periodischen Verlauf (also Cosinus/Sinus in t) verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt. Zum Beispiel also:

$$U(x,t) := e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(at - bx) + \tilde{\delta} \sin(\tilde{a}t - \tilde{b}x) \Big)$$

Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

Lösung der Aufgabe 2:

a) Ein Produktansatz der Form $U(x,t) = v(t)w(x)$ führt für v zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\ddot{v}(t) + (\alpha+\beta)\dot{v}(t) + \alpha\beta v(t)}{v(t)} = c^2 \frac{w''(x)}{w(x)} =: K.$$

Diese liefert

$$\ddot{v}(t) + (\alpha+\beta)\dot{v}(t) + \alpha\beta v(t) = K \cdot v(t) \iff \ddot{v} + (\alpha+\beta)\dot{v} + (\alpha\beta - K)v = 0$$

Dies ist eine gewöhnliche lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten für v. Wir berechnen also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\mu^2 + (\alpha+\beta)\mu + (\alpha\beta + \lambda) = 0 \iff \mu_{1,2} = -\frac{\alpha+\beta}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - (\alpha\beta - K)}$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$v(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t}$ bzw. $v(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 t e^{\mu_1 t}$.

Diese ist genau dann periodisch wenn $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ rein imaginär sind. Letzteres ist nur möglich wenn $\alpha + \beta = 0$ gilt. Aber α und β sind nach Aufgabenstellung positive Konstanten. Unser Produktansatz führt also nicht zum Ziel.

b) Ansatz: $U(x,t) := e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(at - bx) + \tilde{\delta} \sin(\tilde{a}t - \tilde{b}x)\Big)$

$$U(0,t) = \delta \cos(at) + \tilde{\delta} \sin(\tilde{a}t) \stackrel{!}{=} U_0 \cos(\omega t) \implies$$

$\delta = U_0,\ \tilde{\delta} = 0,\ a = \omega$

Es gilt also

$$\begin{aligned} U(x,t) &= U_0 e^{-kx} \cos(\omega t - bx)\,, \\ U_x(x,t) &= U_0 e^{-kx} \left[b \sin(\omega t - bx) - k \cos(\omega t - bx)\right], \\ U_t(x,t) &= -\omega U_0 e^{-kx} \sin(\omega t - bx) \\ U_{xx}(x,t) &= U_0 e^{-kx} \Big[-2kb \sin(\omega t - bx) + (k^2 - b^2) \cos(\omega t - bx)\Big]\,, \\ U_{tt}(x,t) &= -\omega^2 U_0 e^{-kx} \cos(\omega t - bx) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl. mit $\alpha = \beta = c = 1$. ergibt

$$U_0 e^{-kx} \Big\{ \cos(\omega t - bx) \Big[-\omega^2 - (k^2 - b^2) + 1\Big] + \sin(\omega t - bx) \left[2kb - 2\omega\right] \Big\} = 0\,! \qquad x, t > 0$$

Es folgt also

$kb = \omega$ und $-\omega^2 - k^2 + b^2 + 1 = 0$

$\implies k^2 b^2 + k^2 - b^2 - 1 = (k^2 - 1)(b^2 + 1) = 0$ wobei $b \in \mathbb{R}$ ist

$\implies k^2 = 1,$ wobei $k \in \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt wurde, also ist $k = 1$.

Damit folgt aus $kb = \omega$ schließlich $b = \omega$ und

$$U(x,t) = U_0 e^{-x} \cos(\omega(t - x))\,.$$