Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe:

Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = e^{-t}\sin(2x) + 1 && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+, \\ &u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = t && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

a) Führen Sie eine Homogenisierung der Randwerte durch.
Welche Anfangsrandwertaufgabe erhält man nach der Homogenisierung der Randwerte?

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgaben:

(i)

$$\begin{aligned} &v_t^* - v_{xx}^* = 0 && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+, \\ &v^*(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\,, \\ &v^*(0,t) = v^*(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &v_t^{**} - v_{xx}^{**} = e^{-t}\sin(2x) && x \in (0,\pi)\ , t \in \mathbb{R}^+, \\ &v^{**}(x,0) = 0 && x \in (0,\pi)\,, \\ &v^{**}(0,t) = v^{**}(\pi,t) = 0 && t \in \mathbb{R}^+\,. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Mit $\quad v(x,t) = u(x,t) - t - \dfrac{x-0}{\pi-0}(t-t) = u(x,t) - t$

oder $u(x,t) = v(x,t) + t$ erhalten wir

$u_t = v_t + 1, \quad u_{xx} = v_{xx}\,.$ Neue DGL:

$v_t + 1 - v_{xx} = e^{-t}\sin(2x) + 1 \iff \boxed{v_t - v_{xx} = e^{-t}\sin(2x).}$

Anfangswerte: $v(x,0) = u(x,0) - 0 \overset{!}{=} \dfrac{1}{2}\sin(2x) \qquad x \in (0,\pi)\,.$

Randwerte : $v(0,t) = v(\pi,t) = t - t = 0\ .$

b) (i) Für die Homogene Differentialgleichung mit homogenen Randdaten, $\omega = 1$, $c = 1$ und vorgegebenen Anfangswerten

$$v^*(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad x \in (0,\pi),$$

erhält man $$v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t}\sin(k\omega x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{-k^2 t}\sin(kx)$$

Die Anfangsdaten verlangen

$$v^*(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Die a_k sind also die Fourierkoeffizienten von $\frac{1}{2}\sin(2x)$.

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\sin(kx)dx. \tag{1}$$

Hier kann man sich die Integration sparen und erhält über Koeffizientenvergleich: $a_2 = \frac{1}{2}$ und $a_k = 0$ sonst. Also

$$\boxed{v^*(x,t) = \frac{1}{2}e^{-4t}\sin(2x) \qquad .}$$

Natürlich kommt man zum gleichen Ergebnis wenn man die Fourier Koeffizienten über (1) mittels Integration ausrechnet.

(ii) Inhomogene Dgl. mit homogenen Anfangs– und Randdaten

$$\begin{aligned} v_t^{**} - v_{xx}^{**} &= e^{-t}\sin(2x) && x \in (0,\pi),\, t \in \mathbb{R}^+, \\ v^{**}(x,0) &= 0 && x \in (0,\pi), \\ v^{**}(0,t) = v^{**}(\pi,t) &= 0 && t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Ansatz:

$$v^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\sin(kx), \qquad a_k(0) = 0$$

Einsetzen in die Dgl ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\dot a_k(t) + k^2 a_k(t)\Big]\sin(kx) = e^{-t}\sin(2x)$$

Damit erhalten wir $a_k(t) \equiv 0$ für $k \neq 2$ und die gewöhnliche Dgl

$$\dot a_2(t) + 4a_2(t) = e^{-t}$$

für a_2. Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung lautet

$$a_{2,h}(t) = Ce^{-4t}$$

Der Ansatz $a_2(t) = C(t)e^{-4t}$ liefert

$$\dot{C}(t)\, e^{-4t} \;=\; e^{-t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C(t) = c + \frac{1}{3}\, e^{3t} \text{ z.B. } a_{2,p}(t) = \frac{1}{3}\, e^{-t}$$

$$a_2(t) = c\, e^{-4t} + \frac{1}{3}\, e^{-t} \qquad \text{und mit } a_2(0) = 0 \text{ folgt } c = -1/3$$

$$a_2(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)$$

$$v^{**}(x,t) = \frac{1}{3}\,\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)\,\sin(2x)$$

c) Mit den Bezeichnungen aus a) und b) gilt

$$v(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t) = \frac{1}{6}\left(2e^{-t} + e^{-4t}\right)\sin(2x)\,\cdot$$

und

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) + t \;=\; \frac{1}{6}\left(2e^{-t} + e^{-4t}\right)\sin(2x) \;+\; t\,.$$

Bearbeitung: 26.06- 30.06.2023