Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Klausur, Prof. Behrens 2022, 7 Punkte)

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 5u_{xx} &= \frac{\pi x}{4}\sin(\pi t) && \text{für } x \in (0,4), t > 0, \\ u(x,0) &= 2\sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,4], \\ u(0,t) = 0, \quad u(4,t) &= 1 - \cos(\pi t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 5v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,4), t > 0, \\ v(x,0) &= 2\sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,4], \\ v(0,t) = 0, \quad v(4,t) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - 0 - \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t) - 0) = u(x,t) - \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t))$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t)). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + \frac{\pi x}{4}\sin(\pi t), \qquad v_{xx} = u_{xx}$$

Neue DGL: $\quad v_t + \dfrac{\pi x}{4}\sin(\pi t) - 5v_{xx} = \frac{\pi x}{4}\sin(\pi t) \iff$

$$\boxed{v_t - 5v_{xx} = 0} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - \frac{x}{4}(1 - \cos(0)) \\ &= 2\sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x) - 0 \iff \end{aligned}$$

$$\boxed{v(x,0) = 2\sin(\pi x) + 3\sin(2\pi x)}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(4,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

b) Mit $\omega = \frac{\pi}{4}$ und $c = 5$ gilt:

$$v(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{5k^2\pi^2}{16}t} \sin(\frac{k\pi}{4}x) \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$v(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{k\pi}{4}x) \;\overset{!}{=}\; 2\sin(\pi x) \;+\; 3\sin(2\pi x)$

$\Longrightarrow a_4 = 2,\ a_8 = 3,\ a_k = 0 \qquad \forall k \notin \{4, 8\}.$

$$v(x,t) \;=\; 2\,e^{-\frac{5\cdot 4^2\pi^2}{16}t} \sin(\frac{4\pi}{4}x) \;+\; 3\,e^{-\frac{5\cdot 8^2\pi^2}{16}t} \sin(\frac{8\pi}{4}x) \qquad [\textbf{2 Punkte}]$$

c) Für die Lösung von a) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & v(x,t) + \frac{x}{4}\,(1 - \cos(\pi t)) \\ = {} & 2\,e^{-5\pi^2 t} \sin(\pi x) \;+\; 3\,e^{-20\pi^2 t} \sin(2\pi x) + \frac{x}{4}(1 - \cos(\pi t)). \qquad [\textbf{1Punkt}] \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Leiten Sie mit Hilfe eines Produktansatzes die in der Vorlesung 10 (Seite 18) gegebene Reihendarstellung für die Lösung des folgenden Neumann Problems her.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x)$.

Tipp: $2\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$.

Lösung:

a) Kurze Version: Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Ansatz $u_k(x,t) = v_k(x) \cdot w_k(t)$ mit $L = 1$ zu

$$v_k(x) = \cos(k\pi x), \qquad \text{und} \qquad w_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

führt.

Ganz lange Version: Der Ansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ liefert:

$v'' = -\lambda\, v, \quad \dot{w} = -\lambda w, \quad v'(0) = v'(1) = 0$.

Fallunterscheidung unter der Voraussetzung, dass die Lösung nicht identisch verschwindet:

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Longrightarrow v(x) = a_0 + b_0 x, \quad v' = b_0 = 0 \\ &\Longrightarrow v_0(x) = a_0 . \\ \lambda < 0 &\Longrightarrow v(x) = a e^{\sqrt{-\lambda} x} + b e^{-\sqrt{-\lambda} x} \\ &\qquad v'(0) = 0 \Longleftrightarrow a = b \\ &\qquad v'(1) = 0 \Longleftrightarrow a\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0 \\ &\qquad \Longleftrightarrow (u \equiv 0) \vee (e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \Longleftrightarrow \lambda = 0) \qquad \textit{Widerspruch !} \\ \lambda > 0 &\Longrightarrow v(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + b\sin(\sqrt{\lambda}\, x) \\ &\qquad v'(x) = (\sqrt{\lambda})(-a\sin(\sqrt{\lambda}\, x) + b\cos(\sqrt{\lambda}\, x) \\ &\qquad v'(0) = 0 \Longleftrightarrow b = 0 \\ &\qquad v'(1) = 0 \Longleftrightarrow (u \equiv 0) \vee (\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_k \ = \ k^2\pi^2). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$v_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}_0 .$$

Für die Zeitkomponente rechnet man leicht nach

$$w_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}, \quad k \in \mathbb{N}_0 .$$

Als Reihendarstellung für die Lösung hat man also

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x) .$$

Zu erfüllen:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x)\,.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten setzt man g gerade und $2-$ periodisch fort und bestimmt die Fourierkoeffizienten

$$a_k = 2\int_0^1 g(x)\cos(k\pi x)\,dx\,.$$

b) Für $k \notin \{0,2\}$ rechnet man für $g(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x)$.

$$\begin{aligned}
a_k &= 2\int_0^1 (2\pi x - \sin(2\pi x))\cos(k\pi x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 2\pi x\cos(k\pi x)\,dx - 2\int_0^1 \sin(2\pi x)\cos(k\pi x)\,dx \\
&= 4\pi x\,\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_0^1 - 4\pi\int_0^1 \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\,dx - \int_0^1 \sin(2\pi x + k\pi x) + \sin(2\pi x - k\pi x)\,dx \\
&= \frac{4}{k^2\pi}\cos(k\pi x)|_0^1 + \frac{\cos((k+2)\pi x)}{(k+2)\pi}\bigg|_0^1 + \frac{\cos((-k+2)\pi x)}{(-k+2)\pi}\bigg|_0^1 \\
&= \frac{4}{k^2\pi}(\cos(k\pi)-1) + \frac{1}{(k+2)\pi}(\cos((k+2)\pi)-1) - \left(\frac{1}{(k-2)\pi}\cos((-k+2)\pi) - 1\right) \\
&= \frac{4}{k^2\pi}\left((-1)^k - 1\right) - \left(\frac{1}{(k-2)\pi} - \frac{1}{(k+2)\pi}\right)(\cos(k\pi)-1) \\
&= \left(\frac{4}{k^2\pi} - \frac{4}{(k^2-4)\pi}\right)\cdot\left((-1)^k - 1\right) = \left(\frac{16\cdot\left(1-(-1)^k\right)}{k^2\cdot(k^2-4)\pi}\right)
\end{aligned}$$

Für $k=0$ erhält man

$$a_0 = 2\int_0^1 2\pi x - \sin(2\pi x)\,dx = 2\pi$$

und für $k=2$

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2\int_0^1 2\pi x\cos(2\pi x) - \sin(2\pi x)\cos(2\pi x)dx \\
&= \frac{4}{2^2\pi}\left((-1)^2 - 1\right) - \int_0^1 \sin(4\pi x)dx = 0.
\end{aligned}$$