Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{für } 0 \le x^2 + y^2 < 9, \\ v(x,y) &= \frac{x}{9}\,(x-y) \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

Hinweise:

- *Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz.*
- $\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1$, $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$.

Lösung:
Wir verwenden Sie Polarkoordinaten $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, und
$v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi)$.
Dann lautet die Randbedingung:

$$u(3,\phi) = \; v(x(3,\phi), y(3,\phi)) \;=\; v(3\cos(\phi), 3\sin(\phi)) \;=\; \frac{3\cos(\phi)}{9}\,(3\cos(\phi) - 3\sin(\phi)) \;\; .$$

Aus der Hörsaalübung kennen wir die allgemeine Lösung:

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0\ln(r) \;+\; \sum_k (c_k r^{-k} \;+\; d_k r^k)(a_k\cos(k\phi) \;+\; b_k\sin(k\phi))}$$

Da die Lösung im Inneren eines Kreises um Null definiert (insbesondere auch beschränkt) sein soll, kommen die negativen Potenzen und der $\ln -$ Term nicht in Frage. Daher erhalten wir o.E.d.A. mit $d_k = 1$ die Lösungsdarstellung:

$$u(r,\phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \,(a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi))\, r^k\,.$$

Die Randdaten liefern noch die Bedingung

$$\begin{aligned} u(3,\phi) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \,(a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi))\, 3^k \\ &\overset{!}{=} \cos(\phi)\,(\cos(\phi) - \sin(\phi)) = \cos^2(\phi) - \sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{1}{2}\,(1 + \cos(2\phi) - \sin(2\phi)) \;\; . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann

$a_0 + \ (a_2 \cos(2\phi) + b_2 \sin(2\phi)) \cdot 3^2 \ \stackrel{!}{=} \dfrac{1}{2}\,(1 + \cos(2\phi) - \sin(2\phi))$

$\Longrightarrow\ a_0 = \frac{1}{2}$ und $a_2 = \ -b_2 = \dfrac{1}{18}$ und damit die Lösung

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} \ + \ \frac{r^2}{18}\,\cos(2\phi) \ - \ \frac{r^2}{18}\,\sin(2\phi)\,.$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie die folgenden Dirichletprobleme

a)

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 && \text{auf } (0,2)\times(0,1),\\ v(x,0) &= \sin(\pi x), && x\in(0,2),\\ v(x,1) &= 0, && x\in(0,2),\\ v(0,y) &= 0, && y\in(0,1)\\ v(2,y) &= 0, && y\in(0,1). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \Delta w &= 0 && \text{auf } (0,2)\times(0,1),\\ w(x,0) &= 0, && x\in(0,2),\\ w(x,1) &= -5\sin(2\pi x), && x\in(0,2),\\ w(0,y) &= 0, && y\in(0,1)\\ w(2,y) &= 0, && y\in(0,1). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } (0,2)\times(0,1),\\ u(x,0) &= 6\sin(\pi x), && x\in(0,2),\\ u(x,1) &= 5\sin(2\pi x), && x\in(0,2),\\ u(0,y) &= 0, && y\in(0,1)\\ u(2,y) &= 0, && y\in(0,1). \end{aligned}$$

Lösung:

a) Ein Produktansatz der Form $v(x,y)=X(x)Y(y)$ führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X''=-\lambda X,\quad Y''=\lambda Y$$

Für nicht triviale Lösungen $v\not\equiv 0$ liefern die Randdaten

$$\begin{aligned} v(0,y) &= X(0)Y(y)=0 \Longrightarrow X(0)=0,\\ v(2,y) &= X(2)Y(y)=0 \Longrightarrow X(2)=0,\\ v(x,1) &= X(x)Y(1)=0 \Longrightarrow Y(1)=0. \end{aligned}$$

Aufgrund der beiden Nullrandwerte für X lösen wir zunächst die Randwertaufgabe

$X''=-\lambda X\,,\ X(0)=0\,,\ X(2)=0\,.$

Dabei erhalten wir(wie auf Blatt 1 Präsenzaufgaben) nur für positive λ nichttriviale Lösungen

$$\begin{aligned} &X(x)=A_\lambda\cos(\sqrt{\lambda}x)+B_\lambda\sin(\sqrt{\lambda}x)\\ &X(0)=0\Longrightarrow A_\lambda=0,\quad X(2)=0\Longrightarrow 2\sqrt{\lambda_k}=k\pi\\ &X_k(x)=\sin(\frac{k\pi}{2}x),\ k\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

Mit diesen λ-Werten wird die Differentialgleichung für Y gelöst.

$$Y'' = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 Y \Longrightarrow Y_k(y) = A_k e^{-\frac{k\pi}{2}y} + B_k e^{\frac{k\pi}{2}y}$$

$$Y_k(1) = 0 \Longrightarrow A_k e^{-\frac{k\pi}{2}} + B_k e^{\frac{k\pi}{2}} = 0 \Longrightarrow A_k = -e^{k\pi} B_k$$

$$\Longrightarrow Y_k(y) = B_k \left(e^{\frac{k\pi}{2}y} - e^{k\pi} e^{-\frac{k\pi}{2}y}\right)$$

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips erhalten wir die Funktion $v(x,y)$ als Linearkombination der $X_k(x)Y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ und machen ohne Diskussion der Konvergenz den Reihenansatz

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(e^{\frac{k\pi}{2}y} - e^{k\pi} e^{-\frac{k\pi}{2}y}\right) \sin(\frac{k\pi}{2}x).$$

Die Koeffizienten c_k erhalten wir nun aus der noch nicht verwendeten Randbedingung $v(x,0) = \sin(\pi x)$. Es gilt:

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - e^{k\pi}\right) \sin(\frac{k\pi}{2}x) \overset{!}{=} \sin(\pi x)$$

$$\Longrightarrow c_2 \left(1 - e^{2\pi}\right) = 1, \ c_k = 0, k \neq 2$$

Also insgesamt:

$$v(x,y) = \frac{e^{\pi y} - e^{2\pi} e^{-\pi y}}{1 - e^{2\pi}} \sin(\pi x).$$

b) Für das zweite Problem erhalten wir völlig analog

$X_k(x) = \sin(\frac{k\pi}{2}x)$, $\qquad Y_k(y) = A_k e^{-\frac{k\pi}{2}y} + B_k e^{\frac{k\pi}{2}} y$

Hier lautet die dritte Null Randbedingung

$Y_k(0) = 0 \Longrightarrow Y_k(y) = A_k + B_k = 0 \Longrightarrow B_k = -A_k$.

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(e^{-\frac{k\pi}{2}y} - e^{\frac{k\pi}{2}} y\right) \sin(\frac{k\pi}{2}x).$$

Die Koeffizienten A_k erhalten wir nun aus der noch nicht verwendeten Randbedingung $w(x,1) = 5\sin(2\pi x)$. Es gilt:

$$w(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(e^{-\frac{k\pi}{2}} - e^{\frac{k\pi}{2}}\right) \sin(\frac{k\pi}{2}x) \overset{!}{=} -5\sin(2\pi x).$$

$$\Longrightarrow A_4 \left(e^{-2\pi} - e^{2\pi}\right) = -5, \ A_k = 0, k \neq 4$$

Also insgesamt:

$$w(x,y) = A_4 \cdot (e^{-\frac{4\pi}{2}y} - e^{\frac{4\pi}{2}y}) \sin(\frac{4\pi}{2}x) = 5 \cdot \frac{e^{-2\pi y} - e^{2\pi y}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \sin(2\pi x).$$

c) Wegen der Linearität der Differentialgleichung erhält man $u = 6v - w$.

Bearbeitung am 12-16.06.2023