

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

- a) Gesucht sei eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta v(x, y) = 0$ in einem rotationssymmetrischen Gebiet, zum Beispiel in einem Kreisring. Das Gebiet lässt sich dann mittels Polarkoordinaten besser beschreiben. Man geht dafür über zu

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \text{und}$$

$$v(x(r, \phi), y(r, \phi)) = u(r, \phi).$$

Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ folgende Äquivalenz gilt:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0 \iff r^2 (v_{xx} + v_{yy}) = 0.$$

- b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= 0 && \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4, \\ v(x, y) &= 1 && \text{auf } x^2 + y^2 = 1, \\ v(x, y) &= 2 && \text{auf } x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Tipp: Gehen Sie zu Polarkoordinaten über. Die Randdaten sind unabhängig von ϕ . Versuchen Sie es daher mit dem Ansatz

$$v(x, y) = u(r, \phi) = w(r).$$

Lösung:

- a)

$$u_r = v_x \cdot x_r + v_y \cdot y_r = \cos(\phi)v_x + \sin(\phi)v_y$$

$$u_\phi = v_x \cdot x_\phi + v_y \cdot y_\phi = -r \sin(\phi)v_x + r \cos(\phi)v_y$$

$$u_{rr} = v_{xx} \cos^2(\phi) + 2v_{xy} \cos(\phi) \sin(\phi) + v_{yy} \sin^2(\phi)$$

$$u_{\phi\phi} = v_{xx} r^2 \sin^2(\phi) + 2v_{xy} r^2 \cos(\phi)(-\sin(\phi)) + v_{yy} r^2 \cos^2(\phi) - r \cos(\phi)v_x - r \sin(\phi)v_y$$

Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} &= (r^2 \cos^2(\phi) + r^2 \sin^2(\phi))v_{xx} \\ &\quad + (2r^2 \cos(\phi) \sin(\phi) - 2r^2 \cos(\phi) \sin(\phi))v_{xy} \\ &\quad + (r^2 \sin^2(\phi) + r^2 \cos^2(\phi))v_{yy} \\ &\quad + r \cos(\phi)v_x + r \sin(\phi)v_y - r \cos(\phi)v_x - r \sin(\phi)v_y \\ &= r^2 (v_{xx} + v_{yy}). \end{aligned}$$

- b) Wir gehen nicht nur über zu Polarkoordinaten, sondern machen wegen der Art der Randbedingungen sogar den Ansatz $v(x, y) = u(r, \phi) = w(r)$. Nach Teil a) erhalten wir die Differentialgleichung

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = w'' + \frac{1}{r}w' = 0.$$

Wir haben also eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für $g := w'$.

$$g'(r) = -\frac{1}{r}g(r) \implies \frac{dg}{g} = -\frac{dr}{r} \implies \ln(|g|) = -\ln(|r|) + k$$

$$\implies g(r) = \frac{c}{r} = w'(r). \text{ Hieraus erhalten wir}$$

$$u(r, \phi) = w(r) = c \ln(r) + d.$$

Die Randwerte liefern

$$u(1, \phi) = 1 \implies c \ln(1) + d = 1 \implies d = 1.$$

$$u(2, \phi) = 2 \implies c \ln(2) + 1 = 2 \implies c = \frac{1}{\ln(2)}.$$

$$u(r, \phi) = \frac{1}{\ln(2)} \ln(r) + 1.$$

$$v(x, y) = \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}{\ln(2)} + 1.$$

Aufgabe 2:

- a) Zeigen Sie, dass durch $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \beta_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ -\frac{8}{(k\pi)^3} & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$

die Fourierkoeffizienten der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi y) + \beta_k \sin(k\pi y))$$

der ungeraden, 2-periodischen Fortsetzung von

$$g(y) = y^2 - y, \quad 0 \leq y \leq 1$$

gegeben sind.

- b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0 & x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= 0 & x \in [0, 1], \\ u(x, 1) &= 0 & x \in [0, 1], \\ u(0, y) &= g(y) = y^2 - y & y \in [0, 1], \\ u(1, y) &= 0 & y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Lösung:

- a) Es gilt $a_k = 0$, da die fortgesetzte Funktion ungerade ist. Für die β_k erhält man

$$\begin{aligned} \beta_k &= 2 \int_0^1 (y^2 - y) \sin(k\pi y) dy = 2 \left[(y^2 - y) \frac{-\cos(k\pi y)}{k\pi} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 (2y - 1) \frac{\cos(k\pi y)}{k\pi} dy \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[(2y - 1) \frac{\sin(k\pi y)}{k\pi} \right]_0^1 - \frac{4}{k\pi} \int_0^1 \frac{\sin(k\pi y)}{k\pi} dy \\ &= \frac{4}{(k\pi)^2} \left[\frac{\cos(k\pi y)}{k\pi} \right]_0^1 = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{8}{(k\pi)^3} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Einsetzen des Produktansatzes $u(x, y) = v(x)w(y)$ in die Differentialgleichung liefert

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \implies \frac{v''}{v} = -\frac{w''}{w} = \lambda \quad \lambda \text{ konstant.}$$

Die Randwerte $u(x, 0)$ und $u(x, 1) = 0$ liefern $w(0) = w(1) = 0$. Die Lösungen der Eigenwertaufgabe

$$w'' = -\lambda w, \quad w(0) = w(1) = 0$$

lauten nach Blatt 1, Präsenzaufgabe 1

$$w_k(y) = c_k \sin(k\pi y), \quad \text{wobei } \lambda_k = k^2 \pi^2.$$

Die zweite Differentialgleichung $\frac{v''}{v} = k^2 \pi^2$ hat die Lösungen

$$v_k(x) = \tilde{a}_k e^{k\pi x} + \tilde{b}_k e^{-k\pi x}.$$

Jede Funktion $u_k(x, y) = v_k(x) \cdot w_k(y)$ löst die lineare Differentialgleichung und somit auch jede endliche Linearkombination dieser Lösungen. Ohne Diskussion der Konvergenz machen wir den Ansatz

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi y) (\tilde{a}_k e^{k\pi x} + \tilde{b}_k e^{-k\pi x}).$$

Aus der noch nicht verwendeten Randbedingung $u(1, y) = v(1)w(y) = 0$ folgt

$$\tilde{a}_k e^{k\pi} + \tilde{b}_k e^{-k\pi} = 0 \iff \tilde{b}_k = -\tilde{a}_k e^{2k\pi}$$

und damit

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin(k\pi y) (e^{k\pi x} - e^{2k\pi} e^{-k\pi x}).$$

Die letzte Randbedingung lautet:

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin(k\pi y) (1 - e^{2k\pi}) = y^2 - y.$$

Mit den Fourierkoeffizienten β_k der Funktion $y^2 - y$ bei Entwicklung nach den Funktionen $\sin(k\pi y)$ aus Teil a) gilt also

$$\beta_k = \tilde{a}_k (1 - e^{2k\pi})$$

oder

$$\tilde{a}_k = \frac{\beta_k}{1 - e^{2k\pi}}.$$

und damit

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{1 - e^{2k\pi}} \sin(k\pi y) (e^{k\pi x} - e^{2k\pi} e^{-k\pi x}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{e^{-k\pi} - e^{k\pi}} \sin(k\pi y) (e^{k\pi x - k\pi} - e^{-k\pi x + k\pi}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{e^{-k\pi} - e^{k\pi}} \sin(k\pi y) (e^{k\pi(x-1)} - e^{-k\pi(x-1)}). \end{aligned}$$

Wer lieber mit den hyperbolischen Funktionen arbeitet erhält

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{-\sinh(k\pi)} \sin(k\pi y) \cdot \sinh(k\pi(x-1)).$$