Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3u_{xx} + 8u_{xt} - 3u_{tt} \,=\, 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \cdot \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

c) Wie hängen die neuen Koordinaten η, τ von den alten Koordinaten t, x ab?

Lösung:

$$3u_{xx} + 8u_{xt} - 3u_{tt} \,=\, 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0\,.$$

a) Aus

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -9 - 16 < 0$$

folgt, dass es sich um eine hyperbolische Differentialgleichung handelt.

b) Eigenwerte von A:

$$(3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 25 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \mp 5\,.$$

Als Diagonalform erhält man also

$$-5\tilde{u}_{\eta\eta} + 5\tilde{u}_{\tau\tau} = 0$$

c) Normierte Eigenvektoren von A:

$$(\,\boldsymbol{A} - \lambda_1 I)\,\boldsymbol{v} \,=\, 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} \,=\, 0 \Longleftarrow \boldsymbol{v} \,=\, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätseigenschaft bzw. eine analoge Rechnung für λ_2 ergibt

$$(A - \lambda_2 I)w = 0 \Longrightarrow w = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Transformationsmatrix und die neuen Koordinaten

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \eta \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

also

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(x - 2t)\,, \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2x + t)\,.$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Wert der in $\Omega := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ harmonischen Funktion $u(x, y)$ im Punkt $\binom{0}{0}$ mit den Randdaten

a) $u(x, y) = \dfrac{x + y + 1}{4}$ auf Rand Omega $= \partial\Omega$ unter Verwendung der Poissonschen Integraldarstellung der Lösung.

b) $u(x, y) = x^2 y + 2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

c) $u(x, y) = x^2 - y^2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.

d) $u(x, y) = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$, ohne Rechnung, mit Hilfe des Maximum- /Minimumprinzips.

Lösung:

a) $u(x, y) = \dfrac{x + y + 1}{4} = g(x, y)$ auf Rand Omega $= \partial\Omega$ unter Verwendung der Poissonschen Integraldarstellung der Lösung.

K_2 sei der Kreis mit Radius $R = 2$ und $c(t) = (2\cos\phi,\, 2\sin\phi)$ eine Parametrisierung von K_2. Dann gilt nach der Poissonschen Integralformel für die Lösung

$$u(x, y) = \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2\pi R} \int_{\|z\|=R} \frac{g(\boldsymbol{z})}{\|\,\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\,\|^2}\, d\boldsymbol{z}$$

$$u(0, 0) = \frac{4}{4\pi} \int_{\|z\|=2} \frac{z_1 + z_2 + 1}{16}\, d(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\cos\phi + 2\sin\phi + 1}{4} \cdot 2\, dt = \frac{1}{4}.$$

b) $u(x, y) = x^2 y + 2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Seien K_2 und $c(t)$ wie in Teil a) definiert. Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} u(0, 0) =& \frac{1}{2\pi \cdot 2} \int_{K_2} (x^2 y + 2)\, d(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (4\cos^2(\phi) 2\sin(\phi) + 2) \cdot 2\, dt \\ =& \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{8\cos^3(\phi)}{3} + 2t \right]_0^{2\pi} = 2. \end{aligned}$$

c) $u(x, y) = x^2 - y^2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.

$u(x, y) = x^2 - y^2$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe, ist also die eindeutige Lösung. Damit folgt $u(0, 0) = 0$

d) $u(x, y) = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$, ohne Rechnung, mit Hilfe des Maximum- /Minimumprinzips.

$u(x, y)$ ist konstant auf dem Rand von Ω. Da Maximum und Minimum auf dem Rand angenommen werden, ist u in der ganzen Kreisscheibe konstant $= 4$.