Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u\,,$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)\,,$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0\,,$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x\,,$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0\,.$

Lösung :

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$

$$2 \cdot 8 - 4^2 = 0 \qquad \text{parabolisch}\,.$$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$

$$1 \cdot 0 - 1 = -1 \qquad \text{hyperbolisch}\,.$$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

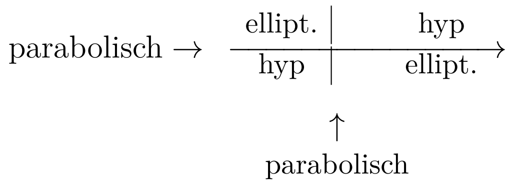
$$3 \cdot 1 - 1^2 = 2 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \ldots = \ldots$

$$1 \cdot e^x - 0^2 > 0 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$x^2 + y^2 - (x + y)^2 = -2xy \qquad \begin{cases} \text{parabolisch für} & xy = 0, \\ \text{hyperbolisch für} & xy > 0, \\ \text{elliptisch für} & xy < 0. \end{cases}$$



Aufgabe 2: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = \ & 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = 0 & \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 2xe^{-x^2}. & \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Substitution $\alpha = x + \frac{t}{4}$, $\mu = x - t$.
Hinweis: Berechnen Sie $v_{\alpha\mu}$ *für* $v(\alpha,\mu) := u(x(\alpha,\mu), t(\alpha,\mu))$.
Alternativ: Umrechnen der Ableitungen nach x, t *in Ableitungen nach* α, μ.

Lösung:

Mit der Substitution $\alpha = x + \frac{t}{4}$, $\mu = x - t$ erhalten wir

$$x = \frac{4\alpha + \mu}{5}, \quad t = \frac{4\alpha - 4\mu}{5},$$

also

$$u(x,t) = u(x(\alpha,\mu), t(\alpha,\mu)) = u\left(\frac{4\alpha+\mu}{5}, \frac{4\alpha - 4\mu}{5}\right) =: v(\alpha,\mu)$$

Erster Vorschlag für die Transformation der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} v_\alpha &= u_x \cdot \frac{dx}{d\alpha} + u_t \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{4}{5}u_x + \frac{4}{5}u_t \\ v_{\alpha\mu} &= \left(u_{xx} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{xt} \cdot \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu}\right) + \left(u_{tx} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dx}{d\mu} + u_{tt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} \cdot \frac{dt}{d\mu}\right) \\ &= \frac{4}{25}u_{xx} - \frac{16}{25}u_{xt} + \frac{4}{25}u_{tx} - \frac{16}{25}u_{tt} = \frac{4}{25}\left(u_{xx} - 4u_{xt} + u_{xt} - 4u_{tt}\right) \end{aligned}$$

Für jede zwei mal stetig differenzierbare Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung gilt mit den eingeführten Bezeichnungen also $\boxed{v_{\alpha\mu} = 0.}$

Alternativer Weg für die Transformation: Für zwei mal stetig differenzierbare Funktionen u und v gilt mit den oben eingeführten Bezeichnungen $\alpha = x + \frac{t}{4}$, $\mu = x - t$ und $u(x,t) =: v(\alpha,\mu) = v(\alpha(x,t), \mu(x,t))$:

$$\begin{aligned} u_x &= v_\alpha \cdot \alpha_x + v_\mu \cdot \mu_x = v_\alpha + v_\mu \\ u_t &= v_\alpha \cdot \alpha_t + v_\mu \cdot \mu_t = \frac{1}{4}v_\alpha - v_\mu \\ u_{xx} &= v_{\alpha\alpha}\alpha_x + v_{\alpha\mu}\mu_x \cdot + v_{\mu\alpha} \cdot \alpha_x + v_{\mu\mu} \cdot \mu_x = v_{\alpha\alpha} + 2v_{\alpha\mu} + v_{\mu\mu} \\ u_{xt} &= v_{\alpha\alpha} \cdot \alpha_t + v_{\alpha\mu} \cdot \mu_t + v_{\mu\alpha} \cdot \alpha_t + v_{\mu\mu} \cdot \mu_t = \frac{1}{4}v_{\alpha\alpha} - \frac{3}{4}v_{\alpha\mu} - v_{\mu\mu} \\ u_{tt} &= \frac{1}{4}v_{\alpha\alpha} \cdot \alpha_t + \frac{1}{4}v_{\alpha\mu} \cdot \mu_t - v_{\mu\alpha} \cdot \alpha_t - v_{\mu\mu} \cdot \mu_t = \frac{1}{16}v_{\alpha\alpha} - \frac{1}{2}v_{\alpha\mu} + v_{\mu\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = \ & 1v_{\alpha\alpha} + 2v_{\alpha\mu} + 1v_{\mu\mu} \\ & -\frac{3}{4}v_{\alpha\alpha} + \frac{9}{4}v_{\alpha\mu} + 3v_{\mu\mu} \\ & -\frac{1}{4}v_{\alpha\alpha} + 2v_{\alpha\mu} - 4v_{\mu\mu} \\ & = \frac{25}{4}v_{\alpha\mu} = 0 \iff \boxed{v_{\alpha\mu} = 0} \end{aligned}$$

Weiterer alternativer Weg für die Transformation:

Matrixschreibweise: $(\nabla^T \boldsymbol{A}\, \nabla)u + (b^T\nabla)u + cu = h\,.$

Hier

DGL: $$(\nabla^T A \nabla)u \;=\; \nabla^T \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \;= \boldsymbol{0}$$

Mit $S^T := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt für $\boldsymbol{v}$ die Differentialgleichung

$\nabla^T_{\alpha\mu}\, \boldsymbol{S}^{\,T} \boldsymbol{A}\; \boldsymbol{S}\, \nabla_{\alpha\mu}\; \boldsymbol{v} \;= \boldsymbol{0}.$

Wobei $\boldsymbol{S}^{\,T} \boldsymbol{A}\; \boldsymbol{S} \;= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{8} \\ \frac{20}{8} & 0 \end{pmatrix}$

Für $\boldsymbol{v}$ erhält man also die Differentialgleichung $\boxed{v_{\alpha\mu} = 0}$

Lösung der transformierten Differentialgleichung

Aus $(v_\alpha)_\mu = 0$ folgt, dass v_α unabhängig von μ ist.

$$v(\alpha,\mu)_\alpha =\; \phi(\alpha) \overset{\int d\alpha}{\Longrightarrow} v(\alpha,\mu) =\; \Phi(\alpha) + \chi(\mu)$$

bzw.

$$u(x,t) = v(\alpha,\mu) = \Phi(x + \frac{t}{4}) + \chi(x - t)$$

mit hinreichend glatten Funktionen Φ und $\chi\,.$

Aus den Anfangswerten ergeben sich die zwei Bedingungen

$$u(x,0) = \Phi(x) + \chi(x) \overset{!}{=} 0 \quad \text{sowie}$$
$$u_t(x,0) = \frac{1}{4}\Phi'(x) - \chi'(x) \overset{!}{=} 2xe^{-x^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\Phi(x) - \chi(x) \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x} 2ze^{-z^2}\, dz \,=\, -e^{-z^2}\Big|_{x_0}^{x}\,.$$

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man

$$\frac{5}{4}\Phi(x) =\; -e^{-x^2} + e^{-x_0^2}.$$

Subtrahiert man das Vierfache der zweiten Gleichung von der ersten erhält man

$$5\chi(x) = 4e^{-x^2} - 4e^{-x_0^2}.$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist daher gegeben durch

$$u(x,t) =\; \Phi(x + \frac{t}{4}) + \chi(x-t) \;=\; -\frac{4}{5}e^{-(x+\frac{t}{4})^2} \;+\; \frac{4}{5}e^{-(x-t)^2}.$$