Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Entropielösung $u(x,t)$ der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$$

b) Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \le 0, \\ 0 & 0 < x \le 1, \\ -2 & 1 < x\,. \end{cases}$$

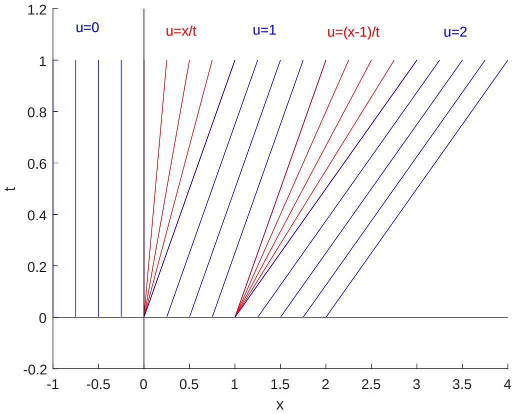
(i) Berechnen Sie eine schwache Lösung für $t \in [0, \tilde{t}\,]$ mit einem hinreichend kleinem $\tilde{t}$.

(ii) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus i) maximal fortgesetzt werden?

(iii) Geben Sie eine schwache Lösung für $t > t^*$ an.

Lösungsskizze:

a) $u_t + uu_x = 0\,,\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad$ Zwei Verdünnungswellen



$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x \leq t \\ 1 & t \leq x \leq t+1 \\ \frac{x-1}{t} & t+1 \leq x \leq 2t+1 \\ 2 & x \geq 2t+1 \end{cases}$$

b) (i) An den zwei Sprungstellen der Anfangsdaten führen wir zwei Stoßwellen ein. Die Sprungbedingung verlangt:

$\dot{s}_1(t) \,=\, \dfrac{\frac{1}{2}+0}{2} \,=\, \frac{1}{4}$ und $\dot{s}_2(t) \,=\, \dfrac{0-2}{2} \,=\, -1\,.$

Wir erhalten die Stoßfronten

$s_1(t) \,=\, \frac{1}{4}\,t$ und $s_2(t) \,=\, 1-\,t\,.$

Für hinreichend kleine t ist

$$u(x,t) \,=\, \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \frac{1}{4}\,t, \\ 0 & \frac{1}{4}\,t \,<\, x \,\leq\, 1-\,t, \\ -2 & 1-\,t \,<\, x\,. \end{cases}$$

eine schwache Lösung.

(ii) Für t^* mit

$\frac{1}{4}\,t^* \,=\, 1-\,t^* \iff \frac{5}{4}\,t^* \,=\, 1 \iff t^* \,=\, \frac{4}{5}$

treffen die Stoßfronten aufeinander und die Lösung aus a) wird mehrdeutig.

(iii) Für $t^* = \frac{4}{5}$ gilt $s_1(t) = s_2(t) = \frac{1}{5}$ und

$$u(x, \frac{4}{5}) \,=\, \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \frac{1}{5}\,, \\ -2 & x > \frac{1}{5}\,. \end{cases}$$

Wir fügen die neue Stoßfront

$$s_3(t) = \frac{1}{5} \,+\, \dot{s}_3(t - \frac{4}{5}) = \frac{1}{5} \,+\, \frac{\frac{1}{2}-2}{2}\,(t - \frac{4}{5})$$

ein und erhalten für $t > \frac{4}{5}$

$$u(x,t) \,=\, \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq \frac{1}{5} \,-\, \frac{3}{4}\,(t - \frac{4}{5}) \,=\, \frac{4}{5} \,-\, \frac{3}{4}\,t. \\ -2 & x > \frac{4}{5} \,-\, \frac{3}{4}\,t. \end{cases}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie Entropielösungen der Differentialgleichung

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

mit der Flussfunktion $f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$ und den Anfangsbedingungen

a) $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \le 0, \\ 1 & 0 < x, \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0, \\ 2 & 0 < x. \end{cases}$

Hinweis: Gefragt sind nur Lösungen für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Lösung:

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt $f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$.

Auf den Charakteristischen Kurven gilt

$\dot{x}(t) = f'(u) = 2(u-2)^3$ und $\dot{u}(t) = 0$.

Die Charakteristiken sind Geraden mit konstanter Steigung $2(u(x(0),0) - 2)^3$.

Bei Verwendung Charakteristiken Methode entsteht in Teil a) sofort (also bereits bei $t = 0$) eine Mehrdeutigkeit der Lösung. Es muss mit $u_l = 2$ und $u_r = 1$ eine Stoßfront $s(t)$ eingeführt werden **[1 Punkt]**

mit

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{\frac{(2-2)^4}{2} - \frac{(1-2)^4}{2}}{2-1} = -\frac{1}{2}$$

eingeführt werden. Man erhält

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = 2 & x \le s(t) = -\frac{t}{2} \\ u_r = 1 & -\frac{t}{2} < x. \end{cases}$$

Für Teil b) liefert die Charakteristiken Methode

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le x_0 + f'(u_l)t = 0 + 2(1-2)^3 t = -2t\,, \\ ? & -2t \le x \le 0\,, \\ 2 & x \ge x_0 + f'(u_r)t = 0 + 2(2-2)^3 t = 0\,. \end{cases}$$

Es muss also eine Verdünnungswelle eingeführt werden.

Mit

$f'(u) = 2(u-2)^3 = v \implies g(v) := (f')^{-1}(v) = \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 2$

erhält man die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le -2t\,, \\ g(\frac{x}{t}) = \left(\frac{x}{2t}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 & -2t \le x \le 0, \\ 2 & x \ge 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3: (Nur für die sehr schnellen Studierenden)

Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Zeichnen Sie die Charakteristiken für die beiden Anfangswertaufgaben für die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0, \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & x > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

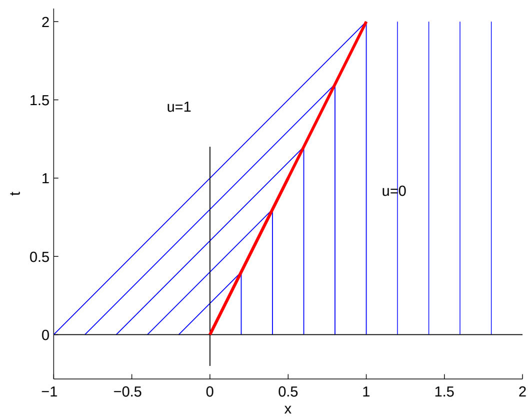
Bestimmen Sie für beiden Anfangswertaufgaben die Lösung $u(x,1)$ zum Zeitpunkt $t = 1$.

Was schließen Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burger's Gleichung?

Lösungsskizze zur Aufgabe 3: $u_t + uu_x = 0$

Die Anfangsdaten $u_1(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ bereits bekannt aus Vorlesung

liefern das folgende Bild der Charakteristiken

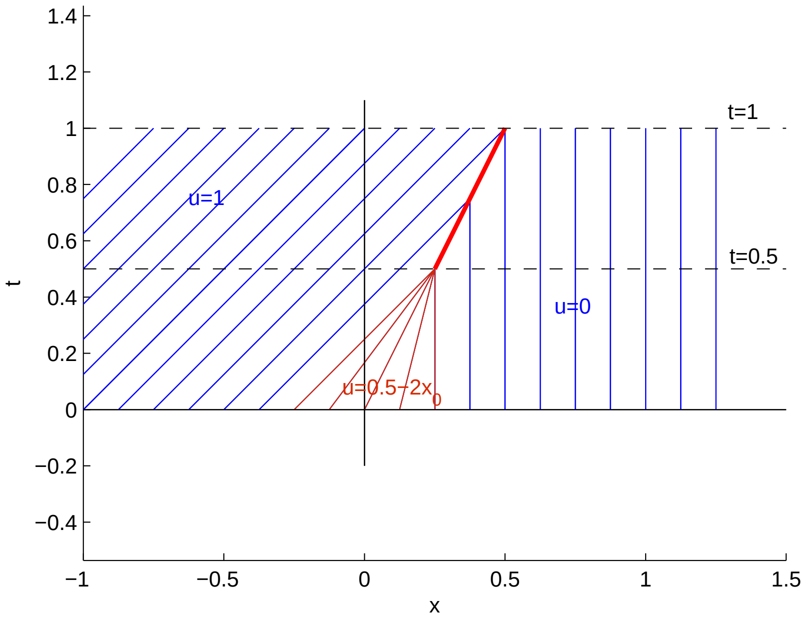


Hier entsteht von Anfang an eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}$, so dass

$$u_1(x,1) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

gilt.

Die Anfangsdaten $u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & x < -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} - 2x & -\dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{1}{4} \\ 0 & x > \dfrac{1}{4} \end{cases}$ liefern:



Auf den Charakteristiken gilt $x - x_0 = u_0.t$.
Für $-\frac{1}{4} \leq x_0 \leq \frac{1}{4}$ und $t = \frac{1}{2}$ also
$x(\frac{1}{2}) = x_0 + \left(\frac{1}{2} - 2x_0\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Die Charakteristiken, die für $t = 0$ zwischen $x = -\frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{4}$ starten, schneiden sich alle im Punkt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Für $t = \frac{1}{2}$ gilt $u(x, \frac{1}{2}) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$

Es entsteht also eine Stoßwelle mit $x_0 = \dfrac{1}{4}$ und $u_l = 1,\ u_r = 0$. Für die Stoßfront gilt somit

$$s(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}, \qquad \dot{s}(t) = \frac{f_l - f_r}{u_l - u_r} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow s(t) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}(t - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{t}{2}.$$

Damit gilt für $t \geq \frac{1}{2}$: $\qquad u_2(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{t}{2}, \\ 0 & x > \frac{t}{2} \end{cases}$

und somit für $t = 1$ ebenfalls: $$u_2(x,1) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \,. \end{cases}$$

Offensichtlich kann man aus Kenntnis der Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$ die Lösung zu früheren Zeiten etwa $t = 0$ nicht rekonstruieren.

Zusatz (nicht durch die Aufgabenstellung verlangt):

Für $t < 0.5$ gilt:

$u(x,t) = 1$ *für* $x \leq t - 0.25\,,$

$u(x,t) = 0$ *für* $x \geq 0.25\,.$

Dazwischen, also für $t - 0.25 < x < 0.25$ gilt:

$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{du}{dt} = 0.$ *D.h. u konstant entlang der Charakteristiken und*

$x = ut + c \iff c = x(0) = x - ut$

$\implies u(x,t) = u_0(x - ut) = \frac{1}{2} - 2(x - ut) \iff u \cdot (1 - 2t) = \frac{1}{2} - 2x$

Also $u(x,t) = \dfrac{1-4x}{2-4t}$ *für* $t - 0.25 < x < 0.25,\ 0 < t < 0.5\,.$