Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Alte Klausuraufgabe [6 Punkte]

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 4t\,u_x &= 3\,, & x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+,\\ u(x,0) &= \sin(2x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und lösen Sie diese.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$.

Lösung:

a) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:
$\frac{dx}{dt} = 4t \Longrightarrow dx = 4tdt \Longrightarrow x = 2t^2 + C_1$ **[1 Punkt]**
$\frac{du}{dt} = 3 \Longrightarrow du = 3dt \Longrightarrow u = 3t + C_2$ **[1 Punkt]**

b) Mit $C_1 = x - 2t^2$ und $C_2 = u - 3t$ machen wir den Ansatz
$C_2 = f(C_1)$ **[1 Punkt]**

und erhalten

$u - 3t = f(x - 2t^2)$

und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) = 3t + f(x - 2t^2)$. **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = 0 + f(x-0) = f(x) \stackrel{!}{=} \sin(2x)$. **[1 Punkt]**

$u(x,t) = 3t + \sin(2x - 4t^2)$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 2: (Für die ganz schnellen Studierenden)

Lösen Sie das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t - 4e^{-x}u_x &= 1 \qquad && x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung zu 2:

Mit t als Parameter rechnet man

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} = -4e^{-x} & \Longrightarrow & e^x\,dx = -4\,dt \\ \Longrightarrow e^x = -4t + c & \Longrightarrow & c = e^x + 4t \\ \dfrac{du}{dt} = 1 & \Longrightarrow & u(t) = t + d,\ d = u - t \\ \text{Falls } \Phi \text{ auflösbar nach} & u - t\ : & \\ \Phi(e^x + 4t, u - t) = K & \Longrightarrow & u - t = f(e^x + 4t) \\ u(x,0) = f(e^x) = x & \Longrightarrow & f(x) = \ln(x) \\ u(x,t) = f(e^x + 4t) + t & \Longrightarrow & u(x,t) = \ln(e^x + 4t) + t \end{array}$$

Aufgabe 3: (Alte Klausuraufgabe, 5 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 3u^3 u_x = 0,$

B) $u_t + 3x\, u_x = 0,$

C) $u_t + 3\, u_x = 1\,.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,,$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A), B), C) gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken?
ii) die Charakteristiken sind Geraden?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu 3:

Für A) gilt

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken. [**1 Punkt**]

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 3u^3\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden.[**1 Punkt**]

Für B) gilt $\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Die Charakteristiken haben die Steigung $\frac{dx}{dt} = 3x\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist nicht Konstant. Es handelt sich nicht um Geraden. [**1 Punkt**]

Für C) gilt

$\frac{du}{dt} = 1 \Longrightarrow u$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken. [**1 Punkt**]

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 3\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden.[**1 Punkt**]

Bearbeitungstermine: 24.04.23 - 28.04.23