Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Siehe DGL I)

a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Bestimmen Sie alle Lösungen der Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ-werte, für die es nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungen, die nicht konstant gleich Null sind) gibt, heißen Eigenwerte der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen Eigenfunktionen.

Bemerkung: *Die Lösungen dieser Eigenwertaufgabe werden im Laufe des Semesters immer wieder benötigt!*

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

a) Nach DGL I berechnen wir das charakteristische Polynom : $\mu^2 - \lambda \;=\; 0$ mit den Nullstellen

$$\mu_{1,2} \;=\; \pm\sqrt{\lambda} \quad \Longrightarrow y(t) = \begin{cases} c_1\, e^{\sqrt{\lambda}t} \;+\; c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}t} & \lambda \;>\; 0\,, \\ c_1 \;+\; c_2 t & \lambda \;= 0\,, \\ c_1\, \cos(\sqrt{-\lambda}t) \;+\; c_2\, \sin(\sqrt{-\lambda}t) & \lambda \;<\; 0\,. \end{cases}$$

b) Im Fall $\lambda \;>\; 0$ folgt aus dem Randwert für $t = 0$ unmittelbar $c_2 = -c_1$. Der Randwert in L liefert dann:

$c_1\, \left(e^{\sqrt{\lambda}L} \;-\; e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) \;=\; 0 \Longrightarrow c_1\, \left(e^{2\sqrt{\lambda}L} \;-\; 1\right) \;=\; 0 \;\Longrightarrow c_1 = 0$

In diesem Fall gibt es also nur die triviale Lösung $y(t) = 0$

Im Fall $\lambda \;=\; 0$ ist die Lösung eine lineare Funktion. Die einzige lineare Funktion, die sowohl in $t = 0$, als auch in $t = L > 0$ verschwindet, ist wieder die triviale Lösung.

Im Fall $\lambda \;<\; 0$ folgt aus dem Randwert für $t = 0$ unmittelbar $c_1 = 0$. Der Randwert in L liefert dann:

$c_2\, \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \;\vee\; \sqrt{-\lambda}L = k\pi$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für $\lambda \;=\; -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$.

Aufgabe 2) (Wiederholung Analysis II)

Gegeben sei $$f(t) = \begin{cases} 4t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4-4t & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & t \in [1,2] \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die direkte 2-periodische Fortsetzung von f sowie die gerade bzw. ungerade 4-periodische Fortsetzung von f

b) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der ungeraden, 4–periodischen Fortsetzung von f.

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der geraden, 4–periodischen Fortsetzung von f.

Zur Erinnerung:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und **periodisch** mit der Periode $T > 0$, also

$$f(t+T) = f(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Definiere die Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ und bezeichne mit

$$T_n := \left\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, g(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right),\ a_k, b_k \in \mathbb{R}, \right\}$$

den Raum aller $T-$ periodischen **trigonometrischen Polynome vom Grad n** versehen mit dem

Skalarprodukt: $$< f, g > := \tfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t)\, dt\,.$$

und der Norm $$\| g \| := \sqrt{\tfrac{2}{T} \int_0^T (g(t))^2\, dt} = \sqrt{< g, g >}\,.$$

Dann bilden die Funktionen $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t) : \quad k \in \mathbb{N} \right\}$
ein Orthonormalsystem und die **abgeschnittene Fourierreihe von** f

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

mit

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

ist die beste Approximation für f aus T_n, dass heißt

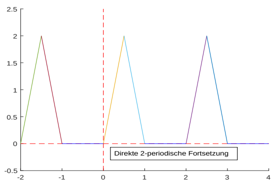
$$\| f - f_n \| < \| f - g \| \quad \forall g \in T_n\,.$$

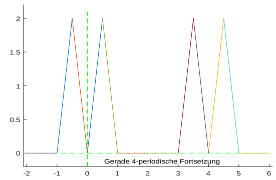
Ist **f gerade** so gilt $b_k = 0$ und $$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

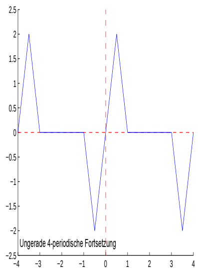
Ist **f ungerade** so gilt $a_k = 0$ und $$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Lösungsskizze:

a)







b) $a_k = 0 \qquad$ da Funktion ungerade!

$$T = 4, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt = \int_0^2 f(t)\sin(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= \int_0^{1/2} 4t\sin(\frac{k\pi}{2}t)dt \;+\; \int_{1/2}^1 (4-4t)\sin(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= 4\left[t\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} + 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}dt$$

$$+4\left[(1-t)\frac{-\cos(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-4)\frac{\cos(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}dt$$

$$= \frac{-8}{k\pi}\left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\right) + \frac{8}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{k\pi}\left(\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\right) - \frac{8}{k\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{16}{(k\pi)^2}\sin(\tfrac{k\pi}{4}) - \frac{16}{(k\pi)^2}\Big(\sin(\tfrac{k\pi}{2}) - \sin(\tfrac{k\pi}{4})\Big) = \frac{16}{(k\pi)^2}\Big(2\sin(\tfrac{k\pi}{4}) - \sin(\tfrac{k\pi}{2})\Big)$$

Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe gegen f:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(k\pi)^2}\left(2\sin(\frac{k\pi}{4}) - \sin(\frac{k\pi}{2})\right)\sin(\frac{k\pi}{2}t)$$

c) $b_k = 0$ da Funktion gerade!

$T = 4, \qquad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^1 (4-4t)dt = \frac{1}{2} + 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ rechnet man wie folgt.

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt = \int_0^2 f(t)\cos(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= \int_0^{1/2} 4t\cos(\frac{k\pi}{2}t)dt + \int_{1/2}^1 (4-4t)\cos(\frac{k\pi}{2}t)dt$$

$$= 4\left[t\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} - 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}dt + 4\left[(1-t)\frac{\sin(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1}(-4)\frac{\sin(\frac{k\pi}{2}t)}{\frac{k\pi}{2}}dt$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left(\sin\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\right) - \frac{8}{k\pi}\left[\frac{-\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{k\pi}\left(\sin\left(\tfrac{k\pi}{4}\right)\right) - \frac{8}{k\pi}\left[\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}{\frac{k\pi}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{16}{k^2\pi^2}\left[2\cos\left(\tfrac{k\pi}{4}\right) - \cos\left(\tfrac{k\pi}{2}\right) - 1\right]$$

Da f stetig, stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe gegen f:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{16}{k^2\pi^2} \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 \right] \right\} \cos(\frac{k\pi}{2}t)$$

Bearbeitung: 10-14.04.2023