Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung Analysis II)

Für die Ableitung Parameterabhängiger Integrale gilt bei hinreichender Glattheit von f die **Leibniz–Regel** :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx} f(x,t)dt + b'(x)\,f(x,b(x)) - a'(x)\,f(x,a(x))}$$

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F(x)$ definiert durch

$$F(x) := \int_{-x}^{x^2} e^{xt}\,dt$$

und berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} F'(x)$.

Lösung zu 1:

$$F(x) = \int_{-x}^{x^2} e^{xt}\,dt\,, \qquad b(x) := x^2,\ a(x) := -x,\ f(t,x) := e^{xt}$$

$$\begin{aligned} b'(x) &= 2x & a'(x) &= -1 \\ f(b(x),x) &= e^{x^3} & f(a(x),x) &= e^{-x^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\,dt + b'(x) f(b(x),x) - a'(x) f(a(x),x) \\
&= \int\limits_{-x}^{x^2} t e^{xt}\,dt + 2x\,e^{x^3} + e^{-x^2} \\
&= \left[\frac{t}{x} e^{tx}\right]_{-x}^{x^2} - \int\limits_{-x}^{x^2} \frac{1}{x} e^{xt}\,dt + 2x\,e^{x^3} + e^{-x^2} \\
&= 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\left[e^{tx}\right]_{-x}^{x^2} = 3x\,e^{x^3} + 2e^{-x^2} - \frac{1}{x^2}\left(e^{x^3} - e^{-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

Einsetzen/ l'Hospital ergibt:

$$
F'(0) = 0 + 2 - \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(e^{x^3} - e^{-x^2}) = 2 - \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 e^{x^3} + 2x e^{-x^2}}{2x} = 2 - 1 = 1\,.
$$

Aufgabe 2: (Wiederholung Analysis II) Bestimmen Sie geeignete reelle Fourier-Reihen der folgenden Funktionen:

a) Ungerade $2L-$ periodische Fortsetzung von

$f\,:\,[0,1[\to \mathbb{R},\quad f(x) = \sin(4\pi x) + 2\sin(6\pi x) \quad L = 1\,.$

b) Gerade $2L-$ periodische Fortsetzung von

$f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[\to \mathbb{R}, \quad L = \pi$ mit

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{4} \le t < \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} \le t < \frac{3\pi}{4}, \\ 2, & \frac{3\pi}{4} \le t < \frac{5\pi}{4}. \end{cases}$$

Bemerkung: *Für DGL II werden Sie die Berechnung von Fourier-Reihen beherrschen müssen. Bitte ggf. wiederholen!*

Lösungshinweise zur Aufgabe 2:

a) Da die Funktion $f(x)$ ungerade fortgesetzt wird, bestimmt man eine Fourier–Sinus–Reihe. Da $2L$ eine Periode der Funktion ist, wählt man $2L-$ periodische Sinusfunktionen. Wir bestimmen also eine Reihe der Form

$$F(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,\sin\left(k\frac{2\pi}{2L}\,x\right)$$

$$L = 1 \implies F(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \,\sin\left(k\pi x\right)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen zwischen den Funktionen $\sin(k\pi x)$ und $\sin(l\pi x)$ (vgl. Mathe II) bzw.durch die Überlegung, dass die Fourierreihe eine möglichst gute Approximation von f sein soll, liest man hier direkt ab:

$$b_4 = 1\,, \quad b_6 = 2\,, \quad b_k = 0 \quad \text{sonst.}$$

b) Da die Funktion $f(t)$ gerade fortgesetzt wird, bestimmt man eine Fourier–Cosinus–Reihe. Da $2L$ eine Periode der Funktion ist, wählt man $2L-$ periodische Cosinusfunktionen. Man würde im allgemeinen eine Reihe der Form

$$F(t) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,\cos\left(k\frac{2\pi}{2L}\,t\right)$$

bestimmen. In unserem speziellen Fall zeigt eine Skizze, dass die Fortsetzung sogar $\pi-$ periodisch ist. Man kann sich hier also auf eine der Reihe der folgenden Form

$$F(t) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}\,t\right)$$

beschränken. Für die Koeffizienten gilt nach Analysis II mit $T = \pi$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}t\right)dt + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 0\cdot\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}t\right)dt \\ &= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2kt)dt \end{aligned}$$

Für $k = 0$ erhält man

$$a_0 = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1dt = \frac{8}{\pi}[t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

und für $k > 0$ ergibt sich

$$a_k = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2kt)dt = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Es folgt

$$a_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 0 & k = 2m,\ m \in \mathbb{N} \\ \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} & k = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

und somit

$$a_0 = 2 \qquad a_1 = \frac{4}{\pi} \qquad a_3 = -\frac{4}{3\pi} \qquad a_5 = \frac{4}{5\pi} \cdots$$

Die ersten vier nicht verschwindenden Summanden der Fourier-Reihe lauten z.B.

$$1 + \frac{4}{\pi}\cos(2t) - \frac{4}{3\pi}\cos(6t) + \frac{4}{5\pi}\cos(10t).$$

Abgabe bis: 14.04.23