Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 2023
07.07.2023

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Formelsammlung für Produktansätze

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

In der Klausur:
Direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!
Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln
(ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Wärmeleitungsgleichung

Laplace-Gleichung polar

Wellengleichung Anfangswertaufgabe

Wellengleichung Anfangsrandwertaufgabe

I) Wärmeleitungsgleichung, Anfangsrandwertaufgabe (ARWA), homogene Differentialgleichung, homogene Randwerte

$$u_t - cu_{xx} = 0 \qquad c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0,$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in [0, L],$$

$$u(0, t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(L, t) = 0 \qquad t > 0,$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t} \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$ evtl. Koeffizientenvergleich

$$a_k = \frac{2}{L} \int_a^b u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx$$ falls Koeff'nvergleich nicht möglich

II) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogene Differentialgleichung, homogene Randwerte:

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0, c > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\,\sin(k\omega x) \qquad\qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Löse Anfangswertaufgaben

$$\frac{da_k(t)}{dt}(t) + a_k(t)\,\frac{ck^2\pi^2}{L^2} = c_k(t), \quad a_k(0) = b_k$$

Wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\,\sin(k\omega x) \overset{!}{=} h(x,t)$$ evtl. Koeffizientenvergleich möglich

sonst:

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\,\sin(k\omega x)dx$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\sin(k\omega x) \overset{!}{=} u_0(x)$$ evtl. Koeffizientenvergleich

sonst:

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\sin(k\omega x)dx$$

III) Wärmeleitungsgleichung, ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_t - c\,u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$
$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogen : Fall I).
Falls neue Dgl. inhomogen : Fall II).

Laplace-Gleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Laplace Operator in Polarkoordinaten: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$.

$$\boxed{\Delta u = 0 \iff u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\phi\phi} = 0\,.}$$

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0\ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k\cos(k\phi) + b_k\sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden.

Vorgehensweise auf dem Außenraum:

$\Delta\, u = \ 0$ für $(x^2 + y^2 =)\, r^2 > R^2$ und $u(R, \phi) = u_0(\phi)$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k$.

Es bleibt: $u(r, \phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\, (a_k \cos(k\phi) \,+\, b_k \sin(k\phi))$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung $u(R, \phi) = u_0(\phi)$.

Man erhält die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \, (A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi))$$

mit den Fourierkoeffizienten von u_0

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi) \, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi) \, d\phi$$

Vorgehensweise im Innenraum:

$\Delta\, u = \ 0$ für $(x^2 + y^2 =)\, r^2 < R^2$ und $u(R, \phi) = u_0(\phi)$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_0 = 0, c_k = 0\,, \quad \forall k.$

Es bleibt: $u(r, \phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^k\, (a_k \cos(k\phi)\ +\ b_k \sin(k\phi))$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung $u(R, \phi) = u_0(\phi)$.

Man erhält die Lösung

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k\, (A_k \cos(k\phi)\ +\ B_k \sin(k\phi))$$

mit den Fourierkoeffizienten von u_0

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi) \, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi) \, d\phi$$

Wellengleichung:

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = 0,\ \tilde{u}(x,0) = f(x),\ \tilde{u}_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\,d\alpha$$

B) AWA, inhomogen:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t),\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) = \tilde{u} + \hat{u} \qquad \tilde{u} \text{ wie in A)}$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} h(\omega,s)\,d\omega\,ds$$

C) ARWA, homogen, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) \ = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \ + \ B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Koeffizientenvergleich oder

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(\alpha)\sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\,d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi}\int_0^L w_0(\alpha)\sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\,d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L w_0(\alpha)\sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\,d\alpha,$

D) **Inhomogene** Differentialgleichung, **homogene** Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}
$$

Löse: $q_k''(t) + c^2 k^2 \omega^2 q_k(t) \ = \ c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\ q_k'(0) = b_k$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L \ u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \ v_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \ h(x,t) \sin(k\omega x)\, dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

E) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = h(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - h(t) - \frac{x}{L}(g(t) - h(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogene Wellengleichung : Fall C)
Falls neue Dgl. inhomogene Wellengleichung : Fall D)