Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -x \cdot \sin(t) && \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ u(x,0) &= 1 - x + 4\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ u_t(x,0) &= x + 3\sin(6\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ u(0,t) = 1, &\quad u(1,t) = \sin(t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,1), t > 0, \\ v(x,0) &= 4\sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ v_t(x,0) &= 3\sin(6\pi x) && \text{für } x \in [0,1], \\ v(0,t) = 0, &\quad v(1,t) = 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Aus der Vorlesung kennen Sie die Formel von d'Alembert

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\,d\alpha$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung

$$\hat{u}_{tt} - c^2\hat{u}_{xx} = 0,\ \hat{u}(x,0) = f(x),\ \hat{u}_t(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R},\ c > 0.$$

a) **(Nur für die ganz schnellen Teilnehmer:innen)** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

die folgende inhomogene Anfangswertaufgabe löst.

$$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0.$$

Tipp: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale (vgl. Blatt 1H):

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt \;=\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{d}{dx}\,f(x,t)dt \;+\; b'(x)\,f(x,b(x))\;-a'(x)\,f(x,a(x))}$$

b) Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -4x, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) &= 1, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cos(x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Berechnen Sie eine Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ \hat{u}(x,0) &= 1,\ x \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}_t(x,0) &= \cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Teil a) eine Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} &= -4x, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) &= 0,\ x \in \mathbb{R}, & \tilde{u}_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(iii) Zeigen Sie durch Einsetzen von u in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass $u = \tilde{u} + \hat{u}$ die Anfangswertaufgabe (1) löst.

Bearbeitung: 10.07- 14.07.2023