Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= 3\sin(2\pi x)\cdot e^{-2t} \qquad && x\in(0,1),\ t>0\\
u(x,0) &= u_0(x) = \sin(\pi x) + 4\sin(2\pi x) && x\in[0,1],\\
u_t(x,0) &= v_0(x) = 0 && x\in[0,1],\\
u(0,t) &= 0 && t>0,\\
u(1,t) &= 0 && t>0,
\end{aligned}$$

Tipp: Setzen Sie den Ansatz

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin(k\omega x), \qquad \omega=\frac{\pi}{1}$$

in die Differentialgleichung ein. Sie erhalten gewöhnliche Differentialgleichung en für die q_k.

Die Anfangsbedingungen liefern die Anfangsdaten für die q_k.

Aufgabe 2: *(Damit Sie nicht auf die Idee kommen, dass man alle linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einfachen Produktansätzen lösen kann.)*

Am Anfangsort $x=0$ eines sehr langen Übertragungskabels werde ein Signal der periodischen Spannung

$$U(0,t) = U_0\cos(\omega t) \qquad t\ge 0,\ \omega>0$$

eingespeist. Gesucht wird die Signalspannung $U(x,t)$ des Ausgangssignals für $x>0, t>0$.
Man erhält U als Lösung der sogenannten Telegraphengleichung

$$U_{tt} - c^2U_{xx} + (\alpha+\beta)U_t + \alpha\beta U = 0\,.$$

Dabei sind α,β,c konstruktionsbedingte positive Kenngrößen des Problems. Ein zeitlich periodisches Eingangssignal lässt nach einer gewissen Einschwingphase ein zeitlich periodisches Ausgangssignal erwarten. Außerdem fordert man

$$U(x,t) \quad \text{beschränkt für} \quad x\to\infty\,.$$

a) Zeigen Sie, dass der Produktansatz $U(x,t) = w(x) \cdot v(t)$ hier nicht zum Erfolg führt!

b) Versuchen Sie es mit einem Lösungsansatz, der eine örtliche Dämpfung (Faktor e^{-kx}) mit einem zeitlich periodischen Verlauf (also Cosinus/Sinus in t) verbindet und eine lineare ortsabhängige Phasenverschiebung zulässt. Zum Beispiel also:

$$U(x,t) := e^{-kx} \cdot \Big(\delta \cos(at - bx) + \tilde{\delta} \sin(\tilde{a}t - \tilde{b}x)\Big)$$

Wählen Sie exemplarisch $\alpha = \beta = c = 1$.

Abgabe bis: 14.07.2023