

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (Klausur, Prof. Behrens 2022, 7 Punkte)

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}u_t - 5u_{xx} &= \frac{\pi x}{4} \sin(\pi t) && \text{für } x \in (0, 4), t > 0, \\u(x, 0) &= 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0, 4], \\u(0, t) &= 0, \quad u(4, t) = 1 - \cos(\pi t) && \text{für } t > 0.\end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}v_t - 5v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0, 4), t > 0, \\v(x, 0) &= 2 \sin(\pi x) + 3 \sin(2\pi x) && \text{für } x \in [0, 4], \\v(0, t) &= 0, \quad v(4, t) = 0 && \text{für } t > 0.\end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Aufgabe 2:

a) Leiten Sie mit Hilfe eines Produktansatzes die in der Vorlesung 10 (Seite 18) gegebene Reihendarstellung für die Lösung des folgenden Neumann Problems her.

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, && 0 < x < 1, t > 0, \\u(x, 0) &= g(x), && 0 < x < 1, \\u_x(0, t) &= u_x(1, t) = 0 && t > 0.\end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x)$.

Tipp: $2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$.

Abgabe bis: 30.06.2023