Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Gesucht sei eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta v(x,y) = 0$ in einem rotationssymmetrischen Gebiet, zum Beispiel in einem Kreisring. Das Gebiet lässt sich dann mittels Polarkoordinaten besser beschreiben. Man geht dafür über zu

$x = r\cos\phi\,,\ y = r\sin\phi\,$, und

$v(x(r,\phi), y(r,\phi)) \;=\; u(r,\phi)\;$.

Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ folgende Äquivalenz gilt:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \iff r^2\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \;=\; 0\,.$$

b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta(v) &= 0 \quad \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 4,\\ v(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1,\\ v(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Tipp: Gehen Sie zu Polarkoordinaten über. Die Randdaten sind unabhängig von ϕ. Versuchen Sie es daher mit dem Ansatz

$$v(x,y) = u(r,\phi) = w(r).$$

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass durch $\quad a_k \;=\; 0,\,\forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \beta_k \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } k \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für} k \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \end{cases}$

die Fourierkoeffizienten der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\pi y) \;+\; \beta_k \sin(k\pi y)\right)$$

der ungeraden, 2–periodischen Fortsetzung von

$$g(y) = y^2 - y,\ 0 \leq y \leq 1$$

gegeben sind.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,1]\,, \\ u(x,1) = 0 & x \in [0,1]\,, \\ u(0,y) = g(y) = y^2 - y & y \in [0,1]\,, \\ u(1,y) = 0 & y \in [0,1]\,. \end{array}$$

Abgabe bis: 16.06.23