

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3u_{xx} + 8u_{xt} - 3u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

- Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).
- Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \cdot \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.
- Wie hängen die neuen Koordinaten η, τ von den alten Koordinaten t, x ab?

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie den Wert der in $\Omega := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \right\}$ harmonischen Funktion $u(x, y)$ im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Randdaten

- $u(x, y) = \frac{x + y + 1}{4}$ auf Rand $\Omega = \partial\Omega$ unter Verwendung der Poissonschen Integraldarstellung der Lösung.
- $u(x, y) = x^2y + 2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.
- $u(x, y) = x^2 - y^2$ auf $\partial\Omega$, mit Hilfe der Eindeutigkeitsaussage für die Lösung.
- $u(x, y) = x^2 + y^2$ auf $\partial\Omega$, ohne Rechnung, mit Hilfe des Maximum-/Minimumprinzips.

Bearbeitung: 29.05.-02.06.2023