Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2023**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Wiederholung DGL I)

a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Bestimmen Sie alle Lösungen der Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen?

Die λ-werte, für die es nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungen, die nicht konstant gleich Null sind) gibt, heißen Eigenwerte der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen Eigenfunktionen.

Bemerkung: *Die Lösungen dieser Eigenwertaufgabe werden im Laufe des Semesters immer wieder benötigt!*

Lösungshinweise zur Aufgabe 1:

Aufgabe 2)

Gegeben sei $$f(t) = \begin{cases} 4t & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 4 - 4t & t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & t \in [1, 2] \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die direkte 2-periodische Fortsetzung von f sowie die gerade bzw. ungerade 4-periodische Fortsetzung von f

b) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der ungeraden, 4–periodischen Fortsetzung von f.

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe der geraden, 4–periodischen Fortsetzung von f.

Zur Erinnerung:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar und **periodisch** mit der Periode $T > 0$, also

$$f(t+T) \;=\; f(t)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Definiere die Kreisfrequenz $\omega = \dfrac{2\pi}{T} =$ und bezeichne mit

$$T_n := \left\{ g : g(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right) \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \right\}$$

den Raum aller $T-$ periodischen **trigonometrischen Polynome vom Grad n** versehen mit dem

Skalarprodukt: $< f, g > := \tfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) \cdot g(t)\, dt\,.$

und der Norm $\|\, g\| \;:=\; \sqrt{\tfrac{2}{T} \displaystyle\int_0^T (g(t))^2\, dt} \;=\; \sqrt{< g, g >}\,.$

Dann bilden die Funktionen $\left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos(k\omega t), \sin(k\omega t) : \qquad k \in \mathbb{N} \right\}$

ein Orthonormalsystem und die **abgeschnittene Fourierreihe von** f

$$f_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right)$$

mit

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t)\, dt\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

ist die beste Approximation für f aus T_n, dass heißt

$$\|\, f - f_n \,\| \;<\; \|\, f - g \,\| \quad \forall g \in T_n\,.$$

Ist **f gerade** so gilt $b_k = 0$ und $\qquad a_k = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}_0\,.$

Ist **f ungerade** so gilt $a_k = 0$ und $\qquad b_k = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt \qquad k \in \mathbb{N}\,.$

Bearbeitung: 11-14.04.2023