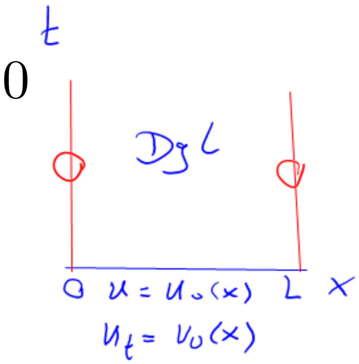
Hörsaalübung zu Blatt 7 Differentialgleichungen II Anfangs(rand)wertaufgaben für die Wellengleichung im eindimensionalen x-Raum

(07.07.2023)

Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

zunächst : **homogene** Dgl. mit homogenen Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x, 0) &= u_0(x) && x \in (0, L), \\
u_t(x, 0) &= v_0(x) && x \in (0, L), \\
u(0, t) &= 0 && t > 0, \\
u(L, t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$



Produktansatz $u(x, t) = p(x) \cdot q(t)$ liefert eingesetzt in Dgl $p \cdot \ddot{q} - c^2 p'' q = 0$

$$p(x) \cdot \ddot{q}(t) = c^2 p''(x) \cdot q(t) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{p \cdot q}$$

hängt nur von x ab

$$\frac{p''}{p} = \frac{\ddot{q}}{c^2 q} = -\lambda$$

hängt nur von t ab

$$p'' = -\lambda p \qquad \text{und} \qquad \ddot{q} = -\lambda c^2 q$$

Für nichttriviale Lösung

Homogene Randbedingungen

$$u(0,t) = p(0)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p(0) = 0} \vee\ q \equiv 0$$

$$u(L,t) = p(L)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p(L) = 0} \vee\ q \equiv 0$$

RWA:

$$\boxed{p''(x) = -\lambda p(x), \qquad p(0) = p(L) = 0}$$

Nichttriviale Lösungen gibt es nur für (vgl. Blatt 1/ HÜ 5): $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2, k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{p_k(x) = \sin(k\omega x) \qquad \omega = \pi/L, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\omega)^2, \quad k \in \mathbb{N}}$$

Zweite Differentialgleichung

$$\ddot{q} = -\lambda c^2 q = -(ck\omega)^2 q \qquad \text{liefert}$$

$$\boxed{q_k(t) = A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)}$$

$\ddot{q} + (ck\omega)^2 q = 0$ $\quad \mu^2 + (ck\omega)^2 = 0$

$\mu = \pm\sqrt{-(ck\omega)^2} = \pm i \cdot ck\omega$

komplexe Lösungen

$e^{ick\omega t}, \ e^{-ick\omega t}$

reelle Lösungen

$\mathrm{Re}(e^{ick\omega t}) = \cos(ck\omega t)$

$\mathrm{Im}(e^{ick\omega t}) = \sin(ck\omega t)$

$$u_k(x,t) := q_k(t) \cdot p_k(x), \qquad k \in \mathbb{N} \text{ löst DGL + erfüllt Randbedingungen.}$$

DGL homogen und linear, RB'n homogen $\longrightarrow$ Superposition erlaubt

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t))}_{q_k(t)} \cdot \underbrace{\sin(k\omega x)}_{p_k(x)}}$$

löst DGL + RB'n.

Zu erfüllen sind mit $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\overset{\infty}{n}} (A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)) \cdot \sin(k\omega x)$

die Anfangsbedingungen.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{n} (A_k \underbrace{\cancel{\cos(0)}}_{1} + B_k \underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{0}) \cdot \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0,L]$$

Für $n \to \infty$ erhält man

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x) \qquad x \in [0, L]$$

Die A_k sind bei glatten Anfangswerten die Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von u_0

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha$$

Die zweite lautet für

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$$

$$u_t(x,t) = \sum \left[A_k \left(-\underbrace{\sin(ck\omega t)}_{\sin(0)=0}\right) ck\omega + B_k \left(\underbrace{\cos(ck\omega t)}_{\cos(0)=1}\right) ck\omega\right] \sin(k\omega x)$$

$t=0$:

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{B_k \cdot (ck\omega)}_{b_k} \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x)$$

b_k Fourier Koeffizienten

mit den Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$period. Fortsetzung von v_0

$b_k = B_k \cdot ck\omega$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) \, d\alpha$$

muss also gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{ck\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

oder $$\boxed{B_k = \frac{1}{ck\omega} b_k = \frac{L}{ck\pi} b_k}$$

Damit erhalten wir die Lösung von

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x, 0) &= u_0(x) && x \in (0, L), \\
u_t(x, 0) &= v_0(x) && x \in (0, L), \\
u(0, t) &= 0 && t > 0, \\
u(L, t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

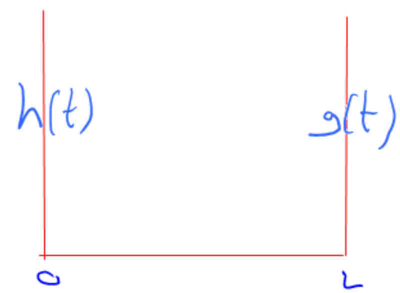
$$
\boxed{u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}
$$

$$
\boxed{A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha, \qquad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha}
$$

Inhomogene Randwerte : Homogenisierung der Randwerte

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0\\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in [0, L],\\
u_t(x,0) &= w_0(x) && x \in [0, L],\\
u(0,t) &= h(t) && t \geq 0,\\
u(L,t) &= g(t) && t \geq 0,
\end{aligned}
$$

Homogenisieren wie in HÜ 6:



$$v(x,t) := u(x,t) - \left[h(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - h(t))\right]$$

Führt zu $v(0,t) = v(L,t) = 0.$

Neue DGL für v:

$$u(x,t) := v(x,t) + \left[h(t) + \frac{x}{L}\,(g(t) - h(t))\right]$$

$$u_{tt}(x,t) = v_{tt} + \left[\ddot{h}(t) + \frac{x}{L}(\ddot{g} - \ddot{h})\right]$$

$$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte aber **homogene Randdaten**

$$v_{tt} + \left[\ddot{h}(t) + \frac{x}{L}\left(\ddot{g}(t) - \ddot{h}(t)\right)\right] - c^2 v_{xx} = 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \left[h(0) + \frac{x}{L}\left(g(0) - h(0)\right)\right] =: v_0(x).$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - \left[\dot{h}(0) + \frac{x}{L}\left(\dot{g}(0) - \dot{h}(0)\right)\right] =: \hat{v}_0(x).$$

$$v(0,t) = 0\,, \qquad v(L,t) = 0\,.$$

Beispiel:

$c = 2$

$u_{tt} - 4u_{xx} = 0$

$L = 1$ $\omega = \frac{\pi}{L} = \pi$

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+,\\
u(x,0) &= x - \sin(\pi x) && 0 \le x \le 1,\\
u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 \le x \le 1,\\
u(0,t) &= 0 = h(t) && t \ge 0,\\
u(1,t) &= 1 = g(t) && t \ge 0.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Homogenisierung der Randwerte:

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &:= u(x,t) - \left[\overbrace{h(t)}^{0} + \frac{x}{L}\left(\overbrace{g(t)}^{1} - \overbrace{h(t)}^{0}\right)\right]\\
&= u(x,t) - \left[0 + \frac{x}{1}(1-0)\right] = u(x,t) - x.
\end{aligned}
$$

$v(x,t) = u(x,t) - x$

$v_{xx} = u_{xx}$ $\qquad v_{tt} = u_{tt} - \left[\underbrace{\ddot{h}(t)}_{0} + \frac{x}{L}\left(\underbrace{\ddot{g}(t)}_{0} - \underbrace{\ddot{h}(t)}_{0}\right)\right] = u_{tt}$

$v_t(x,t) = u_t(x,t) - [x]_t$
$= u_t(x,t) - 0 = u_t(x,t)$

Schritt 2) Neue Aufgabe:

$$
\begin{aligned}
v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
v(x,0) = \underbrace{u(x,0)}_{x - \sin(\pi x)} - x &= -\sin(\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\
(**) \quad v_t(x,0) = u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\
v(0,t) = u(0,t) - 0 &= 0 && t \ge 0\,, \\
v(1,t) = u(1,t) - 1 &= 0 && t \ge 0\,.
\end{aligned}
$$

Schritt 3) Lösung der homogenen Aufgabe:

Mit $c = 2$, $\quad L = 1$

$$
\longrightarrow \quad v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \qquad (*)
$$

$$
v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\underbrace{A_k \cdot \cos(0)}_{A_k \cdot 1} + \underbrace{B_k \sin(0)}_{B_k \cdot 0} \Big] \sin(k\pi x)
$$

$$
= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \overset{!}{=} -1 \cdot \sin(\pi x)
$$

$$
\boxed{A_1 = -1 \qquad A_k = 0\,,\ \forall k \neq 1}
$$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cdot \cos(2k\pi\, t) + B_k \sin(2k\pi\, t) \right] \sin(k\pi x)$$

$$v_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big[-2k\pi A_k \underbrace{\sin(2k\pi\, t)}_{0} \; + \; 2k\pi B_k \underbrace{\cos(2k\pi\, t)}_{1} \big] \; \sin(k\pi x)$$

$$v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2k\pi \cdot B_k \sin(k\pi x) \underset{**}{\overset{!}{=}} 1 \cdot \sin(2\pi x)$$

und damit $\quad 2 \cdot 2\pi \cdot B_2 \overset{!}{=} 1, \quad B_k = 0$ sonst

$$B_2 = \frac{1}{4\pi}$$

$$v(x,t) = A_1 \cos\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{1} t\right) \sin(1\pi x) + B_2 \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{1} t\right) \sin(2\pi x)$$

$$v(x,t) \; = \; \underbrace{A_1}_{-1} \cos\left(2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot t\right) \sin\left(1 \cdot \pi\, x\right) \; + \; \underbrace{B_2}_{\frac{1}{4\pi}} \sin\left(2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right) \sin\left(2 \cdot \pi \cdot x\right)$$

also

$$v(x,t) \; = \; \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t) \sin(2\pi x) - 1 \cos(2\pi t) \sin(\pi x)$$

Die Lösung der ursprünglichen RWA lautet also

$$u(x,t) \; = \; v(x,t) + x \; = \; x \; + \; \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t) \sin(2\pi x) - \cos(2\pi t) \sin(\pi x)$$

Inhomogene Differentialgleichung, homogene Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}$$

$u_{tt} = \sum \ddot{q}_k(t) \sin(k\omega x)$ $u_{xx} = \sum q_k(t)\,(k\omega)^2\,(-\sin(k\omega x))$

Dgl $\sum \left[\ddot{q}_k - c(-k^2\omega^2 q_k(t)) \right] \sin(k\omega x) = h(x,t) \overset{\text{Fourier}}{=} \sum c_k(t) \sin(k\omega x)$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt bei glm. Konvergenz der Reihen auf:

$$\ddot{q}_k(t) + c^2 k^2 \omega^2 q_k(t) = c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\; q_k'(0) = b_k$$

$u(x,0) = \sum q_k(0) \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$

Fourier-Koeff'n der ungeraden 2L-periodischen Fortsetzung von u_0

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$

$u_t(x,0) = \sum \dot{q}_k(0) \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x)$

Fourier-Koeff'n der ungeraden 2L-periodischen Fortsetzung von v_0

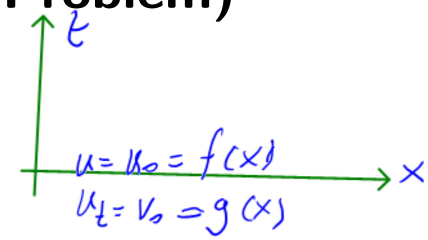
$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin(k\omega x)\, dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

Wellengleichung

Homogene Anfangwertaufgabe (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = f(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Formel von d'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\psi)\, d\psi \,.}$$

Herleitungsmethode:

Substitutio:n $\alpha = x + ct,\ \mu = x - ct,\ w(\alpha(x,t), \mu(x,t)) = u(x,t)$
vgl. Übungsblatt 4

Inhomogene Wellengleichung (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} &= h(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\boxed{\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau} \tag{1}$$

Beweis: Übungsaufgabe. Leibniz Formel

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(y,z)dz = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{d}{dy} f(y,z)dz + b'(y)f(y,b(y)) - a'(y)f(y,a(y))}$$

Beispiel:

$c=2$

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6x\sin t, \ = h(x,t) \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$u(x,0) = \underbrace{x}_{f(x)=x},\ x\in\mathbb{R}, \qquad u_t(x,0) = \underbrace{\sin(x)}_{g(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

- Bestimme Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} = 6x\sin t, \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0,\ x\in\mathbb{R}, \qquad \tilde{u}_t(x,0) = 0,\ x\in\mathbb{R}$$

- Bestimme Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} = 0, \qquad x\in\mathbb{R},\ t>0$$

$$\hat{u}(x,0) = x,\ x\in\mathbb{R}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \sin(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

- $u = \tilde{u} + \hat{u}$ löst die ursprüngliche Anfangswertaufgabe.

- Lösung der inhomogenen Dgl mit homogenen Anfangswerten

$$\boxed{\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau}$$

Mit $h(x,t) = 6x\sin(t)$.

c

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)} \underbrace{6\omega\sin(\tau)}_{h(\omega,\tau)}\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau = \frac{3}{4}\int_0^t \sin(\tau)\,\left[\omega^2\right]_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)}\mathrm{d}\tau$$

2c c

φ ψ' partiell integrieren

$$= \frac{3}{4}\int_0^t \sin(\tau)\left(-8x(\tau-t)\right)\mathrm{d}\tau = 6x\int_0^t t\sin(\tau) - \tau\sin(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$-t\cos(\tau)\Big|_0^t$

$$= \underline{6xt(1-\cos(t))} + 6x\left[\tau\cos(\tau)\right]_0^t - 6x\int_0^t 1\cdot\cos(\tau)\mathrm{d}\tau = 6x(t-\sin t)\,.$$

$\varphi \cdot \psi$ $\varphi' \cdot \psi$

$= 6xt - \underbrace{6xt\cos(t) + 6xt\cos(t)}\, - 0 - 6x\sin(\tau)\Big|_0^t$

$= 6xt - 6x\sin(t)$

- Lösung der homogenen Dgl mit den inhomogenen Anfangswerten

$$\hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$\hat{u}(x,0) = x = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \sin(x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

nach d'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{f(x+ct)}_{x+ct} + \underbrace{f(x-ct)}_{x-ct}\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \overset{\sin(\psi)}{g(\psi)}\, d\psi\,.} \qquad c=2$$

$$\hat{u}(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}(x+2t+x-2t)}_{\frac{1}{2}\cdot 2x} + \underbrace{\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin(\eta)d\eta}_{-\cos(x+2t)+\cos(x-2t)} \overset{(*)}{=} x + \frac{1}{2}\sin(x)\sin(2t)$$

- Die Lösung des ursprünglichen Problems setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen:

$$u(x,t) = 6x(t-\sin t) + x + \frac{1}{2}\sin(x)\sin(2t)$$

$(*)$ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$

Wellengleichung: Zusammenstellung geschlossener Lösungsformeln. Ohne Gewähr! Bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0$, $\tilde{u}(x,0) = f(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\, d\alpha$$

B) AWA, inhomogen:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) = \tilde{u} + \hat{u} \qquad \tilde{u} \text{ wie in A)}$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} h(\omega, s)\, d\omega\, ds$$

C) ARWA, homogen, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L} t\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Koeffizientenvergleich oder

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\, d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L w_0(\alpha) \sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\, d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L w_0(\alpha) \sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\, d\alpha,$

D) Inhomogene Differentialgleichung, homogene Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}
$$

Löse: $q_k''(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) \; = \; c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\, q_k'(0) = b_k$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin(k\omega x)\, dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

E) ARWA, inhomogene Randwerte:

muss nicht 0 sein

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2 u_{xx} = \overset{f(x,t)}{\cancel{0}}, && x \in (0, L),\ t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) && x \in (0, L) \\
&u(0,t) = h(t) \qquad u(L,t) = g(t) && t > 0
\end{aligned}
$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - \left[h(t) + \frac{x}{L}\big(g(t) - h(t)\big) \right]$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogene Wellengleichung : Fall C)
Falls neue Dgl. inhomogene Wellengleichung : Fall D)