Hörsaalübung zu Blatt 7 Differentialgleichungen II Anfangs(rand)wertaufgaben für die Wellengleichung im eindimensionalen x-Raum

(07.07.2023)

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

zunächst : **homogene** Dgl. mit homogenen Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0, L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0, L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Produktansatz $u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$ liefert

$$p(x) \cdot \ddot{q}(t) = c^2 p''(x) \cdot q(t)$$

$$\frac{p''}{p} = \frac{\ddot{q}}{c^2 q} = -\lambda$$

$p'' = -\lambda p$ und $\ddot{q} = -\lambda c^2 q$

Homogene Randbedingungen

$$u(0,t) = p(0)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(0) = 0 \vee q \equiv 0$$

$$u(L,t) = p(L)q(t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(L) = 0 \vee q \equiv 0$$

RWA:

$$p''(x) = -\lambda p(x), \qquad p(0) = p(L) = 0$$

Nichttriviale Lösungen gibt es nur für (vgl. Blatt 1/ HÜ 5): $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2, k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{p_k(x) = \sin(k\omega x) \qquad \omega = \pi/L, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\omega)^2, \quad k \in \mathbb{N}}$$

Zweite Differentialgleichung

$\ddot{q} = -\lambda c^2 q = -(ck\omega)^2 q$ liefert

$$q_k(t) = A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)$$

$u_k(x,t) := q_k(t) \cdot p_k(x), \qquad k \in \mathbb{N}$ löst DGL + erfüllt Randbedingungen.

DGL homogen und linear, RB'n homogen $\longrightarrow$ Superposition erlaubt

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)}$$

löst DGL + RB'n.

Zu erfüllen sind mit $u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$

die Anfangsbedingungen.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(0) + B_k \sin(0)\right) \cdot \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0,L]$$

Für $n \to \infty$ erhält man

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0,L]$$

Die A_k sind bei glatten Anfangswerten die Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von u_0

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha$$

Die zweite lautet für

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x)$$

$$u_t(x,t) =$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega) \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} v_0(x)$$

mit den Fourierkoeffizienten der ungeraden $2L-$period. Fortsetzung von v_0

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) \, d\alpha$$

muss also gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{ck\pi}{L} \sin(\frac{k\pi}{L}x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

oder $\qquad B_k = \dfrac{1}{ck\omega} b_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$

Damit erhalten wir die Lösung von

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) && x \in (0, L), \\ u_t(x, 0) &= v_0(x) && x \in (0, L), \\ u(0, t) &= 0 && t > 0, \\ u(L, t) &= 0 && t > 0, \end{aligned}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

$$\boxed{A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha, \qquad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(\alpha) \sin\left(\frac{k\pi\alpha}{L}\right) d\alpha}$$

Inhomogene Randwerte : Homogenisierung der Randwerte

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0, L),\ t > 0 \\
u(x, 0) &= u_0(x) && x \in [0, L], \\
u_t(x, 0) &= w_0(x) && x \in [0, L], \\
u(0, t) &= h(t) && t \geq 0, \\
u(L, t) &= g(t) && t \geq 0,
\end{aligned}
$$

Homogenisieren wie in HÜ 6:

$$v(x,t) := u(x,t) - \left[h(t) + \frac{x}{L}\left(g(t) - h(t)\right)\right]$$

Führt zu $v(0,t) = v(L,t) = 0$.

Neue DGL für v:

$$u(x,t) := v(x,t) + \left[h(t) + \frac{x}{L}\left(g(t) - h(t)\right)\right]$$

$$u_{tt}(x,t) =$$

$$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte aber **homogene Randdaten**

$$v_{tt} + \left[\ddot{h}(t) + \frac{x}{L}\left(\ddot{g}(t) - \ddot{h}(t)\right)\right] - c^2 v_{xx} = 0$$

$$v(x,0) = u(x,0) - \left[h(0) + \frac{x}{L}\left(g(0) - h(0)\right)\right] =: v_0(x).$$

$$v_t(x,0) = u_t(x,0) - \left[\dot{h}(0) + \frac{x}{L}\left(\dot{g}(0) - \dot{h}(0)\right)\right] =: \hat{v}_0(x).$$

$$v(0,t) = 0\,, \qquad v(L,t) = 0\,.$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= x - \sin(\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\
u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\
u(0,t) &= 0 && t \ge 0\,, \\
u(1,t) &= 1 && t \ge 0\,.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Homogenisierung der Randwerte:

$$
v(x,t) := u(x,t) - h(t) - \frac{x}{L}\,(g(t) - h(t))
$$
$$
= u(x,t) - 0 - \frac{x}{1}\,(1-0) = u(x,t) - x\,\cdot
$$

$v_{xx} =$ $\qquad$ $v_{tt} =$

Schritt 2) Neue Aufgabe:

$$\begin{aligned} v_{tt} - 4v_{xx} &= 0 && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ v(x,0) = u(x,0) - x &= -\sin(\pi x) && 0 \leq x \leq 1\,, \\ v_t(x,0) = u_t(x,0) &= \sin(2\pi x) && 0 \leq x \leq 1\,, \\ v(0,t) = u(0,t) - 0 &= 0 && t \geq 0\,, \\ v(1,t) = u(1,t) - 1 &= 0 && t \geq 0\,. \end{aligned}$$

Schritt 3) Lösung der homogenen Aufgabe:

Mit $c = 2, \quad L = 1$

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(\frac{ck\pi}{L}\, t) \,+\, B_k \sin(\frac{ck\pi}{L}\, t) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}\, x)$$

$v(x,0) =$

$$v_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-2k\pi A_k \sin(2k\pi\, t) \;+\; 2k\pi B_k \cos(2k\pi\, t)\,\right] \sin(k\pi x)$$

$v_t(x,0) =$

und damit

$$v(x,t) \;=\; A_1 \cos\left(2\cdot 1\cdot \pi\cdot t\right) \sin\left(1\cdot \pi\, x\right) \;+\; B_2 \sin\left(2\cdot 2\cdot \pi\cdot t\right) \sin\left(2\cdot \pi\cdot x\right)$$

also

$$v(x,t) \;=\; \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t)\sin(2\pi x) - \cos(2\pi t)\sin(\pi x)$$

Die Lösung der ursprünglichen RWA lautet also

$$u(x,t) \;=\; v(x,t) + x \;=\; x \;+\; \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi t)\sin(2\pi x) - \cos(2\pi t)\sin(\pi x)$$

Inhomogene Differentialgleichung, homogene Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}
$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt bei glm. Konvergenz der Reihen auf:

$$\ddot{q}_k(t) + c^2 k^2 \omega^2 q_k(t) \;=\; c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\; q_k'(0) = b_k$$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin(k\omega x)\, dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

Wellengleichung

Homogene Anfangwertaufgabe (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) = f(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Formel von d'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\, f(x+ct) + f(x-ct)\,\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\psi)\, d\psi\,.}$$

Herleitungsmethode:

Substitutio:n $\alpha = x + ct$, $\mu = x - ct$, $w(\alpha(x,t), \mu(x,t)) = u(x,t)$
vgl. Übungsblatt 4

Inhomogene Wellengleichung (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} &= h(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\ \tilde{u}(x,0) &= \tilde{u}_t(x,0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathsf{d}\omega\mathsf{d}\tau \tag{1}$$

Beweis: Übungsaufgabe. Leibniz Formel

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(y,z)dz = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{d}{dy} f(y,z)dz + b'(y)f(y,b(y)) - a'(y)f(y,a(y))}$$

Beispiel:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 6x\sin t, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$u(x,0) = x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad u_t(x,0) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

- Bestimme Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} = 6x\sin t, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \tilde{u}_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

- Bestimme Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$\hat{u}(x,0) = x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

- $u = \tilde{u} + \hat{u}$ löst die ursprüngliche Anfangswertaufgabe.

- Lösung der inhomogenen Dgl mit homogenen Anfangswerten

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathsf{d}\omega\mathsf{d}\tau$$

Mit $h(x,t) = 6x\sin(t)$.

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)} 6\omega\;\sin(\tau)\,\mathsf{d}\omega\mathsf{d}\tau = \frac{3}{4}\int_0^t \sin(\tau)\;\left[\omega^2\right]_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)}\mathsf{d}\tau$$

$$= \;\frac{3}{4}\int_0^t \sin(\tau)\,(-8x(\tau-t)\mathsf{d}\tau \;=\; 6x\int_0^t t\sin(\tau)\;-\;\tau\sin(\tau)\mathsf{d}\tau$$

$$= \;6xt(1-\cos(t)) + 6x\left[\tau\cos(\tau)\right]_0^t - 6x\int_0^t \cos(\tau)\mathsf{d}\tau = 6x(t-\sin t)\,.$$

- Lösung der homogenen Dgl mit den inhomogenen Anfangswerten

$$\hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$\hat{u}(x,0) = x = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \sin(x) = g(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

nach d'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\, f(x+ct) + f(x-ct)\,\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\psi)\, d\psi\,.}$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}(x + 2t + x - 2t) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin(\eta) d\eta = x + \frac{1}{2}\sin(x)\sin(2t)$$

- Die Lösung des ursprünglichen Problems setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen:

$$u(x,t) = 6x(t - \sin t) + x + \frac{1}{2}\sin(x)\sin(2t)$$

Wellengleichung: Zusammenstellung geschlossener Lösungsformeln. Ohne Gewähr! Bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0$, $\tilde{u}(x,0) = f(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\,d\alpha$$

B) AWA, inhomogen:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$u(x,t) = \tilde{u} + \hat{u} \qquad \tilde{u} \text{ wie in A)}$$

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(s-t)}^{x-c(s-t)} h(\omega,s)\,d\omega\,ds$$

C) ARWA, homogen, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

$$u(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) \;+\; B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L} t\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Koeffizientenvergleich oder

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\, d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L w_0(\alpha) \sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\, d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L w_0(\alpha) \sin(\frac{k\pi\alpha}{L})\, d\alpha,$

D) **Inhomogene** Differentialgleichung, **homogene** Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{L}$

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin(k\omega x)}
$$

Löse: $q_k''(t) + c^2k^2\omega^2 q_k(t) \;=\; c_k(t)\,, \qquad q_k(0) = a_k,\; q_k'(0) = b_k$

Mit: $a_k = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L u_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Fourier-Koeffizienten evtl. über Koeffizientenvergleich berechnen!

E) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad && x \in (0,L),\ t > 0 \\
&u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad && x \in (0,L) \\
&u(0,t) = h(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad && t > 0
\end{aligned}
$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - \left[h(t) + \frac{x}{L}(g(t) - h(t))\right]$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Falls neue Dgl. homogene Wellengleichung : Fall C)
Falls neue Dgl. inhomogene Wellengleichung : Fall D)